Partie A :

Dans un pays, une maladie touche la population avec une probabilité de $0,05$.

On possède un test de dépistage de cette maladie.

On considère un échantillon de n personnes $(n \geqslant 20)$ prises au hasard dans la population assimilé à un tirage avec remise.

On teste l'échantillon suivant cette méthode : on mélange le sang de ces n individus, on teste le mélange.

Si le test est positif, on effectue une analyse individuelle de chaque personne.

Soit X_n la variable aléatoire qui donne le nombre d'analyses effectuées.

1. Montrer X_n prend les valeurs 1 et $(n+1)$.
2. Prouver que $P\left(X_n=1\right)=0,95^n$.

   Établir la loi de X_n en recopiant sur la copie et en complétant le tableau suivant:

x_i	1	$n+1$
$P\left(X_n=x_i\right)$		

3. Que représente l'espérance de X_n dans le cadre de l'expérience ?

   Montrer que $E\left(X_n\right)=n+1-n\times 0,95^n$.

Partie B :

1. On considère la fonction f définie sur $[20\,;\,+\infty[$ par $f(x)=\ln(x)+x\ln(0,95)$.

   Montrer que f est décroissante sur $[20\,;\,+\infty[$.
2. On rappelle que $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\ln x}{x}=0$. Montrer que $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=-\infty$.
3. Montrer que $f(x)=0$ admet une unique solution a sur $[20\,;\,+\infty[$.

   Donner un encadrement à 0,1 près de cette solution.
4. En déduire le signe de f sur $[20\,;\,+\infty[$.

Partie C :

On cherche à comparer deux types de dépistages.

La première méthode est décrite dans la partie A, la seconde, plus classique, consiste à tester tous les individus.

La première méthode permet de diminuer le nombre d'analyses dès que $E\left(X_n\right)<n$.

En utilisant la partie B, montrer que la première méthode diminue le nombre d'analyses pour des échantillons comportant 87 personnes maximum.