On considère les suites (u_n) et (v_n) définies pour tout entier naturel n par :

$$\begin{cases} u_0 &= v_0 = 1 \\ u_{n+1} &= u_n + v_n \\ v_{n+1} &= 2u_n + v_n \end{cases}$$

Dans toute la suite de l'exercice, on **admet** que les suites (u_n) et (v_n) **sont strictement positives**.

1. (a) Calculez u_1 et v_1.
   (b) Démontrer que la suite (v_n) est strictement croissante, puis en déduire que, pour tout entier naturel n, $v_n \geqslant 1$.
   (c) Démontrer par récurrence que, pour tout entier naturel n, on a : $u_n \geqslant n+1$.
   (d) En déduire la limite de la suite (u_n).
2. On pose, pour tout entier naturel n :

$$r_n = \frac{v_n}{u_n}.$$

On admet que:

$$r_n^2 = 2 + \frac{(-1)^{n+1}}{u_n^2}$$

   (a) Démontrer que pour tout entier naturel n :

$$-\frac{1}{u_n^2} \leqslant \frac{(-1)^{n+1}}{u_n^2} \leqslant \frac{1}{u_n^2}.$$

   (b) En déduire :

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{u_n^2}.$$

   (c) Déterminer la limite de la suite (r_n^2) et en déduire que (r_n) converge vers $\sqrt{2}$.
   (d) Démontrer que pour tout entier naturel n,

$$r_{n+1} = \frac{2+r_n}{1+r_n}.$$

   (e) On considère le programme suivant écrit en langage Python :

```python
def seuil():
    n = 0
    r = 1
    while abs(r-sqrt(2)) > 10**(-4) :
        r = (2+r)/(1+r)
        n = n+1
    return n
```

(abs désigne la valeur absolue, sqrt la racine carrée et 10** (-4) représente 10^{-4}).
La valeur de n renvoyée par ce programme est 5.
À quoi correspond-elle ?