

Principaux domaines abordés :
Fonction logarithme; dérivation

Partie 1

On désigne par h la fonction définie sur l'intervalle $]0 ; +\infty[$ par :

$$h(x) = 1 + \frac{\ln(x)}{x^2}.$$

On admet que la fonction h est dérivable sur $]0 ; +\infty[$ et on note h' sa fonction dérivée.

1. Déterminez les limites de h en 0 et en $+\infty$.
2. Montrer que, pour tout nombre réel x de $]0 ; +\infty[$, $h'(x) = \frac{1 - 2\ln(x)}{x^3}$.
3. En déduire les variations de la fonction h sur l'intervalle $]0 ; +\infty[$.
4. Montrer que l'équation $h(x) = 0$ admet une solution unique α appartenant à $]0 ; +\infty[$ et vérifier que : $\frac{1}{2} < \alpha < 1$.
5. Déterminer le signe de $h(x)$ pour x appartenant à $]0 ; +\infty[$.

Partie 2

On désigne par f_1 et f_2 les fonctions définies sur $]0 ; +\infty[$ par :

$$f_1(x) = x - 1 - \frac{\ln(x)}{x^2} \quad \text{et} \quad f_2(x) = x - 2 - \frac{2\ln(x)}{x^2}.$$

On note \mathcal{C}_1 et \mathcal{C}_2 les représentations graphiques respectives de f_1 et f_2 dans un repère $(O ; \vec{i}, \vec{j})$.

1. Montrer que, pour tout nombre réel x appartenant à $]0 ; +\infty[$, on a :

$$f_1(x) - f_2(x) = h(x).$$

2. Déduire des résultats de la Partie 1 la position relative des courbes \mathcal{C}_1 et \mathcal{C}_2 .

On justifiera que leur unique point d'intersection a pour coordonnées $(\alpha ; \alpha)$.

On rappelle que α est l'unique solution de l'équation $h(x) = 0$.