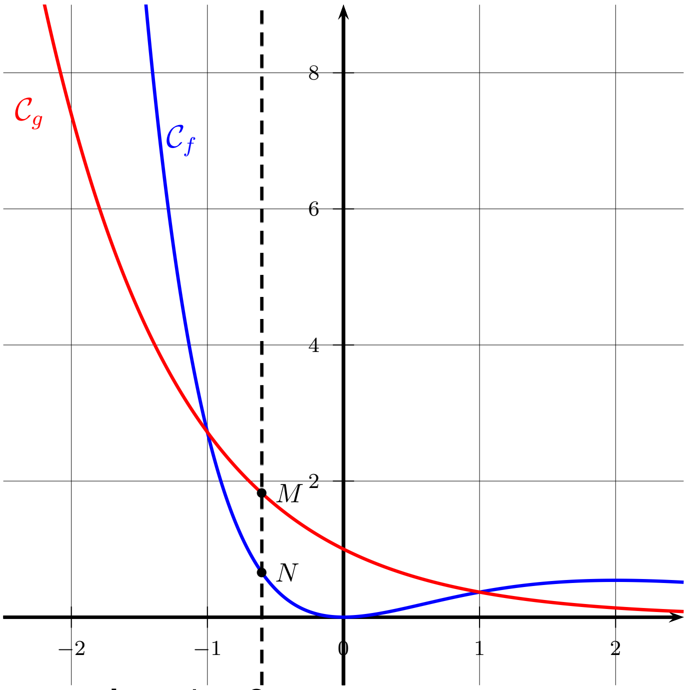
Principaux domaines abordés: Fonction exponentielle; dérivation.

Le graphique ci-contre représente, dans un repère orthogonal, les courbes $\mathcal{C}_f$ et $\mathcal{C}_g$ des fonctions f et g définies sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x) = x^2\mathrm{e}^{-x} \quad \text{et} \quad g(x) = \mathrm{e}^{-x}.$$



La question 3 est indépendante des questions 1 et 2.

1. (a) Déterminer les coordonnées des points d'intersection de $\mathcal{C}_f$ et $\mathcal{C}_g$.
   (b) Étudier la position relative des courbes $\mathcal{C}_f$ et $\mathcal{C}_g$.

2. Pour tout nombre réel x de l'intervalle $[-1\ ;\ 1]$, on considère les points M de coordonnées $(x\ ;\ f(x))$ et N de coordonnées $(x\ ;\ g(x))$, et on note $d(x)$ la distance MN. On admet que : $d(x) = \mathrm{e}^{-x} - x^2\mathrm{e}^{-x}$.

   On admet que la fonction d est dérivable sur l'intervalle $[-1\ ;\ 1]$ et on note d' sa fonction dérivée.

   (a) Montrer que $d'(x) = \mathrm{e}^{-x}\left(x^2 - 2x - 1\right)$.
   (b) En déduire les variations de la fonction d sur l'intervalle $[-1\ ;\ 1]$.
   (c) Déterminer l'abscisse commune x_0 des points M_0 et N_0 permettant d'obtenir une distance $d\left(x_0\right)$ maximale, et donner une valeur approchée à $0,1$ près de la distance M_0N_0.

3. Soit Δ la droite d'équation $y = x + 2$.

   On considère la fonction h dérivable sur $\mathbb{R}$ et définie par: $h(x) = \mathrm{e}^{-x} - x - 2$.

   En étudiant le nombre de solutions de l'équation $h(x) = 0$, déterminer le nombre de points d'intersection de la droite Δ et de la courbe $\mathcal{C}_g$.