

Principaux domaines abordés :  
Suites numériques ; raisonnement par récurrence.

On considère les suites  $(u_n)$  et  $(v_n)$  définies par :

$$u_0 = 16 \quad ; \quad v_0 = 5 \quad ;$$

et pour tout entier naturel  $n$  :

$$\begin{cases} u_{n+1} = \frac{3u_n + 2v_n}{5} \\ v_{n+1} = \frac{u_n + v_n}{2} \end{cases}$$

1. Calculer  $u_1$  et  $v_1$ .
2. On considère la suite  $(w_n)$  définie pour tout entier naturel  $n$  par :  $w_n = u_n - v_n$ .
  - (a) Démontrer que la suite  $(w_n)$  est géométrique de raison 0,1.  
En déduire, pour tout entier naturel  $n$ , l'expression de  $w_n$  en fonction de  $n$ .
  - (b) Préciser le signe de la suite  $(w_n)$  et la limite de cette suite.

3. (a) Démontrer que, pour tout entier naturel  $n$ , on a :  $u_{n+1} - u_n = -0,4w_n$ .  
(b) En déduire que la suite  $(u_n)$  est décroissante.

On peut démontrer de la même manière que la suite  $(v_n)$  est croissante. On admet ce résultat, et on remarque qu'on a alors : pour tout entier naturel  $n$ ,  $v_n \geq v_0 = 5$ .

- (c) Démontrer par récurrence que, pour tout entier naturel  $n$ , on a :  $u_n \geq 5$ .  
En déduire que la suite  $(u_n)$  est convergente. On appelle  $\ell$  la limite de  $(u_n)$ .

On peut démontrer de la même manière que la suite  $(v_n)$  est convergente. On admet ce résultat, et on appelle  $\ell'$  la limite de  $(v_n)$ .

4. (a) Démontrer que  $\ell = \ell'$ .  
(b) On considère la suite  $(c_n)$  définie pour tout entier naturel  $n$  par :  $c_n = 5u_n + 4v_n$ .  
Démontrer que la suite  $(c_n)$  est constante, c'est-à-dire que pour tout entier naturel  $n$ , on a :  $c_{n+1} = c_n$ .  
En déduire que, pour tout entier naturel  $n$ ,  $c_n = 100$ .  
(c) Déterminer la valeur commune des limites  $\ell$  et  $\ell'$ .