

Principaux domaines abordés :

Suites numériques ; raisonnement par récurrence.

On considère les suites (u_n) et (v_n) définies par :

$$u_0 = 16 \quad ; \quad v_0 = 5 ;$$

et pour tout entier naturel n :

$$\begin{cases} u_{n+1} &= \frac{3u_n + 2v_n}{5} \\ v_{n+1} &= \frac{u_n + v_n}{2} \end{cases}$$

1. Calculer u_1 et v_1 .

2. On considère la suite (w_n) définie pour tout entier naturel n par : $w_n = u_n - v_n$.

(a) Démontrer que la suite (w_n) est géométrique de raison 0,1.

En déduire, pour tout entier naturel n , l'expression de w_n en fonction de n .

(b) Préciser le signe de la suite (w_n) et la limite de cette suite.

3. (a) Démontrer que, pour tout entier naturel n , on a : $u_{n+1} - u_n = -0,4w_n$.

(b) En déduire que la suite (u_n) est décroissante.

On peut démontrer de la même manière que la suite (v_n) est croissante. On admet ce résultat, et on remarque qu'on a alors: pour tout entier naturel n , $v_n \geq v_0 = 5$.

(c) Démontrer par récurrence que, pour tout entier naturel n , on a : $u_n \geq 5$.

En déduire que la suite (u_n) est convergente. On appelle ℓ la limite de (u_n) .

On peut démontrer de la même manière que la suite (v_n) est convergente. On admet ce résultat, et on appelle ℓ' la limite de (v_n) .

4. (a) Démontrer que $\ell = \ell'$.

(b) On considère la suite (c_n) définie pour tout entier naturel n par : $c_n = 5u_n + 4v_n$.

Démontrer que la suite (c_n) est constante, c'est-à-dire que pour tout entier naturel n , on a :

$$c_{n+1} = c_n.$$

En déduire que, pour tout entier naturel n , $c_n = 100$.

(c) Déterminer la valeur commune des limites ℓ et ℓ' .