

Exercice B

EXERCICE – B

Principaux domaines abordés

- Étude de fonction, fonction exponentielle
- Équations différentielles

Partie I

Considérons l'équation différentielle

$$y' = -0,4y + 0,4$$

où y désigne une fonction de la variable t , définie et dérivable sur $[0 ; +\infty[$.

- (a) Déterminer une solution particulière constante de cette équation différentielle.
(b) En déduire l'ensemble des solutions de cette équation différentielle.
(c) Déterminer la fonction g , solution de cette équation différentielle, qui vérifie $g(0) = 10$.

Partie II

Soit p la fonction définie et dérivable sur l'intervalle $[0 ; +\infty[$ par

$$p(t) = \frac{1}{g(t)} = \frac{1}{1 + 9e^{-0,4t}}.$$

- Déterminer la limite de p en $+\infty$.
- Montrer que $p'(t) = \frac{3,6e^{-0,4t}}{(1 + 9e^{-0,4t})^2}$ pour tout $t \in [0 ; +\infty[$.
- (a) Montrer que l'équation $p(t) = \frac{1}{2}$ admet une unique solution α sur $[0 ; +\infty[$.
(b) Déterminer une valeur approchée de α à 10^{-1} près à l'aide d'une calculatrice.

Partie III

- p désigne la fonction de la partie II.

Vérifier que p est solution de l'équation différentielle $y' = 0,4y(1 - y)$ avec la condition initiale $y(0) = \frac{1}{10}$ où y désigne une fonction définie et dérivable sur $[0 ; +\infty[$.

- Dans un pays en voie de développement, en l'année 2020, 10 % des écoles ont accès à internet. Une politique volontariste d'équipement est mise en uvre et on s'intéresse à l'évolution de la proportion des écoles ayant accès à internet.
On note t le temps écoulé, exprimé en année, depuis l'année 2020.
La proportion des écoles ayant accès à internet à l'instant t est modélisée par $p(t)$.
Interpréter dans ce contexte la limite de la question II 1 puis la valeur approchée de α de la question II 3. b. ainsi que la valeur $p(0)$.