**Principaux domaines abordés : Suites numériques; raisonnement par récurrence ; suites géométriques.**

La suite $(u_n)$ est définie sur $\mathbb{N}$ par $u_0 = 1$ et pour tout entier naturel $n$,

$$u_{n+1} = \frac{3}{4}u_n + \frac{1}{4}n + 1.$$

1. Calculer, en détaillant les calculs, $u_1$ et $u_2$ sous forme de fraction irréductible.

L'extrait, reproduit ci-contre, d'une feuille de calcul réalisée avec un tableur présente les valeurs des premiers termes de la suite $(u_n)$.

| | A | B |
|---|---|---|
| 1 | $n$ | $u_n$ |
| 2 | 0 | 1 |
| 3 | 1 | 1,75 |
| 4 | 2 | 2.562,5 |
| 5 | 3 | 3.421,875 |
| 6 | 4 | 4.316,406,25 |

2. (a) Quelle formule, étirée ensuite vers le bas, peut-on écrire dans la cellule B3 de la feuille de calcul pour obtenir les termes successifs de $(u_n)$ dans la colonne B ?
   (b) Conjecturer le sens de variation de la suite $(u_n)$.
3. (a) Démontrer par récurrence que, pour tout entier naturel $n$, on a : $n \leqslant u_n \leqslant n+1$.
   (b) En déduire, en justifiant la réponse, le sens de variation et la limite de la suite $(u_n)$.
   (c) Démontrer que :

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{u_n}{n} = 1.$$

4. On désigne par $(v_n)$ la suite définie sur $\mathbb{N}$ par $v_n = u_n - n$
   (a) Démontrer que la suite $(v_n)$ est géométrique de raison $\frac{3}{4}$.
   (b) En déduire que, pour tout entier naturel $n$,on a : $u_n = \left(\frac{3}{4}\right)^n + n$.