Principaux domaines abordés : Fonction logarithme; convexité

On considère la fonction f définie sur l'intervalle $]0\ ;\ +\infty[$ par :

$$f(x) = x + 4 - 4\ln(x) - \frac{3}{x}$$

où ln désigne la fonction logarithme népérien.
On note $\mathcal{C}$ la représentation graphique de f dans un repère orthonormé.

1. Déterminer la limite de la fonction f en $+\infty$.
2. On admet que la fonction f est dérivable sur $]0\ ;\ +\infty[$ et on note f' sa fonction dérivée.

   Démontrer que, pour tout nombre réel $x > 0$, on a :

$$f'(x) = \frac{x^2 - 4x + 3}{x^2}.$$

3. (a) Donner le tableau de variations de la fonction f sur l'intervalle $]0\ ;\ +\infty[$.
   On y fera figurer les valeurs exactes des extremums et les limites de f en 0 et en $+\infty$.
   On admettra que $\lim\limits_{x \to 0} f(x) = -\infty$.

   (b) Par simple lecture du tableau de variations, préciser le nombre de solutions de l'équation $f(x) = \frac{5}{3}$.

4. Étudier la convexité de la fonction f c'est-à-dire préciser les parties de l'intervalle $]0\ ;\ +\infty[$ sur lesquelles f est convexe, et celles sur lesquelles f est concave.

   On justifiera que la courbe $\mathcal{C}$ admet un unique point d'inflexion, dont on précisera les coordonnées.