

**Commun à tous les candidats**

On considère la suite  $(u_n)$  définie par :  $u_0 = 1$  et, pour tout entier naturel  $n$ ,

$$u_{n+1} = \frac{4u_n}{u_n + 4}.$$

1.

$n$	$u_n$	$\frac{4}{u_n}$
0	1,00	4
1	0,80	5
2	0,67	6
3	0,57	7
4	0,50	8
5	0,44	9
6	0,40	10
7	0,36	11
8	0,33	12
9	0,31	13
10	0,29	14
11	0,27	15
12	0,25	16

La copie d'écran ci-contre présente les valeurs, calculées à l'aide d'un tableur, des termes de la suite  $(u_n)$  pour  $n$  variant de 0 à 12, ainsi que celles du quotient  $\frac{4}{u_n}$ , (avec, pour les valeurs de  $u_n$ , affichage de deux chiffres pour les parties décimales).

À l'aide de ces valeurs, conjecturer l'expression de  $\frac{4}{u_n}$  en fonction de  $n$ .

Le but de cet exercice est de démontrer cette conjecture (question 5.), et d'en déduire la limite de la suite  $(u_n)$  (question 6.).

2. Démontrer par récurrence que, pour tout entier naturel  $n$ , on a :  $u_n > 0$ .

3. Démontrer que la suite  $(u_n)$  est décroissante.

4. Que peut-on conclure des questions 2. et 3. concernant la suite  $(u_n)$  ?

5. On considère la suite  $(v_n)$  définie pour tout entier naturel  $n$  par :  $v_n = \frac{4}{u_n}$ .

Démontrer que  $(v_n)$  est une suite arithmétique.

Préciser sa raison et son premier terme.

En déduire, pour tout entier naturel  $n$ , l'expression de  $v_n$  en fonction de  $n$ .

6. Déterminer, pour tout entier naturel  $n$ , l'expression de  $u_n$  en fonction de  $n$ .

En déduire la limite de la suite  $(u_n)$ .