Commun à tous les candidats

On considère la suite (u_n) définie par $u_0 = 10{,}000$ et pour tout entier naturel n :

$$u_{n+1} = 0,95u_n + 200.$$

1. Calculer u_1 et vérifier que $u_2 = 9{,}415$.
2. (a) Démontrer, à l'aide d'un raisonnement par récurrence, que pour tout entier naturel n :

$$u_n > 4{,}000.$$

   (b) On admet que la suite (u_n) est décroissante. Justifier qu'elle converge.
3. Pour tout entier naturel n, on considère la suite (v_n) définie par: $v_n = u_n - 4{,}000$.
   (a) Calculer v_0.
   (b) Démontrer que la suite (v_n) est géométrique de raison égale à $0,95$.
   (c) En déduire que pour tout entier naturel n :

$$u_n = 4{,}000 + 6{,}000 \times 0,95^n.$$

   (d) Quelle est la limite de la suite (u_n) ? Justifier la réponse.
4. En 2020, une espèce animale comptait 10,000 individus. L'évolution observée les années précédentes conduit à estimer qu'à partir de l'année 2021, cette population baissera de 5 % chaque début d'année.

   Pour ralentir cette baisse, il a été décidé de réintroduire 200 individus à la fin de chaque année, à partir de 2021.

   Une responsable d'une association soutenant cette stratégie affirme que : l'espèce ne devrait pas s'éteindre, mais malheureusement, nous n'empêcherons pas une disparition de plus de la moitié de la population .

   Que pensez-vous de cette affirmation ? Justifier la réponse.