

Dans le parc national des Pyrénées, un chercheur travaille sur le déclin d'une espèce protégée dans les lacs de haute-montagne : le crapaud accoucheur .

Les parties I et II peuvent être abordées de façon indépendante.

### Partie I : Effet de l'introduction d'une nouvelle espèce.

Dans certains lacs des Pyrénées, des truites ont été introduites par l'homme afin de permettre des activités de pêche en montagne. Le chercheur a étudié l'impact de cette introduction sur la population de crapauds accoucheurs d'un lac.

Ses études précédentes l'amènent à modéliser l'évolution de cette population en fonction du temps par la fonction  $f$  suivante :

$$f(t) = (0,04t^2 - 8t + 400) e^{\frac{t}{50}} + 40 \text{ pour } t \in [0 ; 120]$$

La variable  $t$  représente le temps écoulé, en jour, à partir de l'introduction à l'instant  $t = 0$  des truites dans le lac, et  $f(t)$  modélise le nombre de crapauds à l'instant  $t$ .

1. Déterminer le nombre de crapauds présents dans le lac lors de l'introduction des truites.
2. On admet que la fonction  $f$  est dérivable sur l'intervalle  $[0 ; 120]$  et on note  $f'$  sa fonction dérivée.

Montrer, en faisant apparaître les étapes du calcul, que pour tout nombre réel  $t$  appartenant à l'intervalle  $[0 ; 120]$  on a :

$$f'(t) = t(t - 100)e^{\frac{t}{50}} \times 8 \times 10^{-4}.$$

3. Étudier les variations de la fonction  $f$  sur l'intervalle  $[0 ; 120]$ , puis dresser le tableau de variations de  $f$  sur cet intervalle (on donnera des valeurs approchées au centième).
4. Selon cette modélisation:
  - (a) Déterminer le nombre de jours  $J$  nécessaires afin que le nombre de crapauds atteigne son minimum. Quel est ce nombre minimum ?
  - (b) Justifier que, après avoir atteint son minimum, le nombre de crapauds dépassera un jour 140 individus.
  - (c) À l'aide de la calculatrice, déterminer la durée en jour à partir de laquelle le nombre de crapauds dépassera 140 individus.

### Partie II : Effet de la Chytridiomycose sur une population de têtards

Une des principales causes du déclin de cette espèce de crapaud en haute montagne est une maladie, la Chytridiomycose , provoquée par un champignon.

Le chercheur considère que :

- Les trois quarts des lacs de montagne des Pyrénées ne sont pas infectés par le champignon, c'est-à-dire qu'ils ne contiennent aucun têtard (larve du crapaud) contaminé.
- Dans les lacs restants, la probabilité qu'un têtard soit contaminé est de 0,74.

Le chercheur choisit au hasard un lac des Pyrénées, et y procède à des prélèvements.

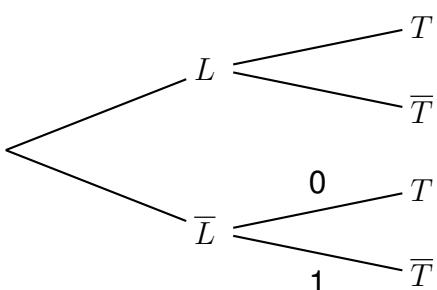
*Pour la suite de l'exercice, les résultats seront arrondis au millième lorsque cela est nécessaire.*

Le chercheur prélève au hasard un têtard du lac choisi afin d'effectuer un test avant de le relâcher.

On notera  $T$  l'évènement Le têtard est contaminé par la maladie et  $L$  l'évènement Le lac est infecté par le champignon .

On notera  $\bar{L}$  l'évènement contraire de  $L$  et  $\bar{T}$  l'évènement contraire de  $T$ .

1. Recopier et compléter l'arbre de probabilité suivant en utilisant les données de l'énoncé:



2. Montrer que la probabilité  $P(T)$  que le têtard prélevé soit contaminé est de 0,185.

3. Le têtard n'est pas contaminé. Quelle est la probabilité que le lac soit infecté ?