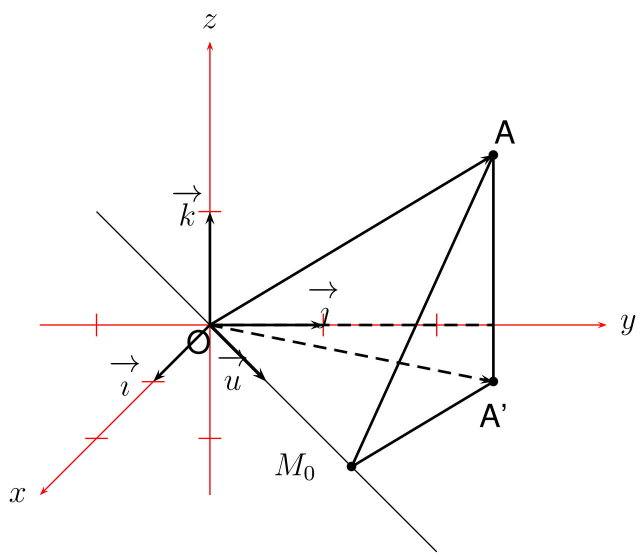
Principaux domaines abordés :
Géométrie de l'espace rapporté à un repère orthonormé ; orthogonalité dans l'espace

Dans un repère orthonormé $\left(O\ ;\ \vec{\imath},\ \vec{\jmath},\ \vec{k}\right)$ on considère

- le point A de coordonnées (1 ; 3 ; 2),
- le vecteur $\vec{u}$ de coordonnées $\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix}$
- la droite $d$ passant par l'origine O du repère et admettant pour vecteur directeur $\vec{u}$.




Le but de cet exercice est de déterminer le point de $d$ le plus proche du point A et détudier quelques propriétés de ce point.
On pourra sappuyer sur la figure ci-contre pour raisonner au fur et à mesure des questions.

1. Déterminer une représentation paramétrique de la droite $d$.
2. Soit $t$ un nombre réel quelconque, et $M$ un point de la droite $d$, le point $M$ ayant pour coordonnées $(t\ ;\ t\ ;\ 0)$.
   (a) On note A$M$ la distance entre les points A et $M$. Démontrer que:
   $$AM^2 = 2t^2 - 8t + 14.$$
   (b) Démontrer que le point $M_0$ de coordonnées $(2\ ;\ 2\ ;\ 0)$ est le point de la droite $d$ pour lequel la distance $AM$ est minimale.
   On admettra que la distance $AM$ est minimale lorsque son carré $AM^2$ est minimal.
3. Démontrer que les droites $(AM_0)$ et $d$ sont orthogonales.
4. On appelle $A'$ le projeté orthogonal du point $A$ sur le plan d'équation cartésienne $z = 0$. Le point $A'$ admet donc pour coordonnées $(1\ ;\ 3\ ;\ 0)$.
   Démontrer que le point $M_0$ est le point du plan $(AA'M_0)$ le plus proche du point O, origine du repère.
5. Calculer le volume de la pyramide $OM_0A'A$.

On rappelle que le volume d'une pyramide est donné par: $V = \frac{1}{3}\mathcal{B}h$, où $\mathcal{B}$ est l'aire d'une base et $h$ est la hauteur de la pyramide correspondant à cette base.