EXERCICE – B

Principaux domaines abordés
– Suites, étude de fonction
– Fonction logarithme

Soit la fonction f définie sur l'intervalle $]1\ ;\ +\infty[$ par

$$f(x) = x - \ln(x-1).$$

On considère la suite (u_n) de terme initial $u_0 = 10$ et telle que $u_{n+1} = f\left(u_n\right)$ pour tout entier naturel n.

Partie I :

La feuille de calcul ci-dessous a permis d'obtenir des valeurs approchées des premiers termes de la suite (u_n).

	A	B
1	n	u_n
2	0	10
3	1	7.802,775,42
4	2	5.885,444,74
5	3	4.299,184,42
6	4	3.105,509,13
7	5	2.360,951,82
8	6	2.052,767,5
9	7	2.001,345,09
10	8	2.000,000,9

1. Quelle formule a été saisie dans la cellule B3 pour permettre le calcul des valeurs approchées de (u_n) par recopie vers le bas ?
2. À l'aide de ces valeurs, conjecturer le sens de variation et la limite de la suite (u_n).

Partie II :

On rappelle que la fonction f est définie sur l'intervalle $]1\ ;\ +\infty[$ par

$$f(x) = x - \ln(x-1).$$

1. Calculer $\lim\limits_{x \to 1} f(x)$. On admettra que $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$.
2. (a) Soit f' la fonction dérivée de f. Montrer que pour tout $x \in]1\ ;\ +\infty[,\ f'(x) = \dfrac{x-2}{x-1}$.
   (b) En déduire le tableau des variations de f sur l'intervalle $]1\ ;\ +\infty[$, complété par les limites.
   (c) Justifier que pour tout $x \geqslant 2,\ f(x) \geqslant 2$.

Partie III :

1. En utilisant les résultats de la partie II, démontrer par récurrence que $u_n \geqslant 2$ pour tout entier naturel n.
2. Montrer que la suite (u_n) est décroissante.
3. En déduire que la suite (u_n) est convergente. On note ℓ sa limite.
4. On admet que ℓ vérifie $f(\ell) = \ell$. Donner la valeur de ℓ.