

Exercice 5

Partie A :

Soit g la fonction définie sur \mathbb{R} par :

$$g(x) = 2e^{-\frac{1}{3}x} + \frac{2}{3}x - 2.$$

- On admet que la fonction g est dérivable sur \mathbb{R} et on note g' sa fonction dérivée.

Montrer que, pour tout réel x :

$$g'(x) = \frac{-2}{3}e^{-\frac{1}{3}x} + \frac{2}{3}.$$

- En déduire le sens de variations de la fonction g sur \mathbb{R} .
- Déterminer le signe de $g(x)$, pour tout x réel.

Partie B :

- On considère l'équation différentielle

$$(E) : \quad 3y' + y = 0.$$

Résoudre l'équation différentielle (E) .

- Déterminer la solution particulière dont la courbe représentative, dans un repère du plan, passe par le point $M(0 ; 2)$.
- Soit f la fonction définie sur \mathbb{R} par :

$$f(x) = 2e^{-\frac{1}{3}x}$$

et \mathcal{C}_f sa courbe représentative.

- Montrer que la tangente (Δ_0) à la courbe \mathcal{C}_f au point $M(0 ; 2)$ admet une équation de la forme :

$$y = -\frac{2}{3}x + 2.$$

- Étudier, sur \mathbb{R} , la position de cette courbe \mathcal{C}_f par rapport à la tangente (Δ_0) .

Partie C :

- Soit A le point de la courbe \mathcal{C}_f d'abscisse a , a réel quelconque.

Montrer que la tangente (Δ_a) à la courbe \mathcal{C}_f au point A coupe l'axe des abscisses en un point P d'abscisse $a + 3$.

- Expliquer la construction de la tangente (Δ_{-2}) à la courbe \mathcal{C}_f au point B d'abscisse -2 .