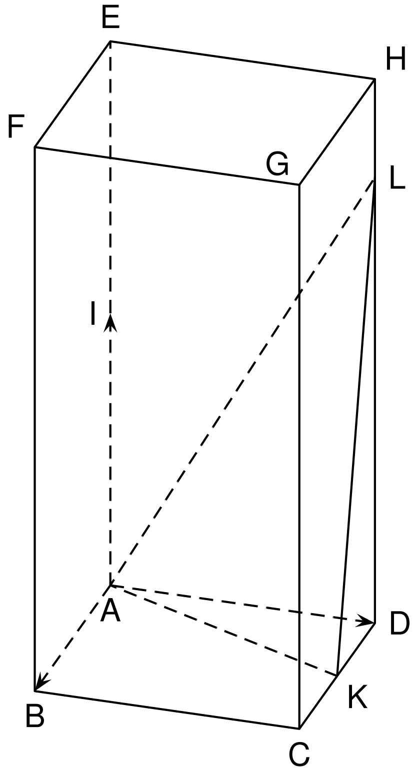
Commun à tous les candidats

On considère un pavé droit ABCDEFGH tel que AB = AD = 1 et AE = 2, représenté ci- dessous.

Le point I est le milieu du segment [AE]. Le point K est le milieu du segment [DC]. Le point L est défini par: $\overrightarrow{\text{DL}} = \frac{3}{2}\overrightarrow{\text{AI}}$. N est le projeté orthogonal du point D sur le plan (AKL).



On se place dans le repère orthonormé $\left(\text{A} ;\ \overrightarrow{\text{AB}},\ \overrightarrow{\text{AD}},\ \overrightarrow{\text{AI}}\right)$.

On admet que le point L a pour coordonnées $\left(0 ;\ 1 ;\ \frac{3}{2}\right)$.

1. Déterminer les coordonnées des vecteurs $\overrightarrow{\text{AK}}$ et $\overrightarrow{\text{AL}}$.

2. (a) Démontrer que le vecteur $\overrightarrow{n}$ de coordonnées $(6 ;\ -3 ;\ 2)$ est un vecteur normal au plan (AKL).
   (b) En déduire une équation cartésienne du plan (AKL).
   (c) Déterminer un système d'équations paramétriques de la droite Δ passant par D et perpendiculaire au plan (AKL).
   (d) En déduire que le point N de coordonnées $\left(\frac{18}{49} ;\ \frac{40}{49} ;\ \frac{6}{49}\right)$ est le projeté orthogonal du point D sur le plan (AKL).

On rappelle que le volume $\mathcal{V}$ d'un tétraèdre est donné par la formule :

$$\mathcal{V} = \frac{1}{3} \times (\text{aire de la base}) \times \text{hauteur}.$$

3. (a) Calculer le volume du tétraèdre ADKL en utilisant le triangle ADK comme base.
   (b) Calculer la distance du point D au plan (AKL).
   (c) Déduire des questions précédentes l'aire du triangle AKL.