EXERCICE – A

Principais domaines abordés
– Suites
– Équations différentielles

Dans cet exercice, on s'intéresse à la croissance du bambou Moso de taille maximale 20 mètres.

Le modèle de croissance de Ludwig von Bertalanffy suppose que la vitesse de croissance pour un tel bambou est proportionnelle à l'écart entre sa taille et la taille maximale.

Partie I : modèle discret

Dans cette partie, on observe un bambou de taille initiale 1 mètre.

Pour tout entier naturel n, on note u_n la taille, en mètre, du bambou n jours après le début de l'observation. On a ainsi $u_0 = 1$.

Le modèle de von Bertalanffy pour la croissance du bambou entre deux jours consécutifs se traduit par l'égalité :

$$u_{n+1} = u_n + 0,05\,(20 - u_n) \text{ pour tout entier naturel } n.$$

1. Vérifier que $u_1 = 1,95$.
2. (a) Montrer que pour tout entier naturel n, $u_{n+1} = 0,95u_n + 1$.

   (b) On pose pour tout entier naturel n, $v_n = 20 - u_n$.
   Démontrer que la suite (v_n) est une suite géométrique dont on précisera le terme initial v_0 et la raison.

   (c) En déduire que, pour tout entier naturel n, $u_n = 20 - 19 \times 0,95^n$.
3. Déterminer la limite de la suite (u_n).

Partie II : modèle continu

Dans cette partie, on souhaite modéliser la taille du même bambou Moso par une fonction donnant sa taille, en mètre, en fonction du temps t exprimé en jour.

D'après le modèle de von Bertalanffy, cette fonction est solution de l'équation différentielle

$$(E) \qquad y' = 0,05(20 - y)$$

où y désigne une fonction de la variable t, définie et dérivable sur $[0\ ;\ +\infty[$ et y' désigne sa fonction dérivée.

Soit la fonction L définie sur l'intervalle $[0\ ;\ +\infty[$ par

$$L(t) = 20 - 19\mathrm{e}^{-0,05t}.$$

1. Vérifier que la fonction L est une solution de (E) et qu'on a également $L(0) = 1$.
2. On prend cette fonction L comme modèle et on admet que, si on note L' sa fonction dérivée, $L'(t)$ représente la vitesse de croissance du bambou à l'instant t.

(a) Comparer $L'(0)$ et $L'(5)$.

(b) Calculer la limite de la fonction dérivée L' en $+\infty$.
Ce résultat est-il en cohérence avec la description du modèle de croissance exposé au début de l'exercice ?