

Commun à tous les candidats

Partie I

On considère la fonction f définie sur \mathbb{R} par

$$f(x) = x - e^{-2x}.$$

On appelle Γ la courbe représentative de la fonction f dans un repère orthonormé $(O; \vec{i}, \vec{j})$.

- Déterminer les limites de la fonction f en $-\infty$ et en $+\infty$.
- Étudier le sens de variation de la fonction f sur \mathbb{R} et dresser son tableau de variation.
- Montrer que l'équation $f(x) = 0$ admet une unique solution α sur \mathbb{R} , dont on donnera une valeur approchée à 10^{-2} près.
- Déduire des questions précédentes le signe de $f(x)$ suivant les valeurs de x .

Partie II

Dans le repère orthonormé $(O; \vec{i}, \vec{j})$, on appelle \mathcal{C} la courbe représentative de la fonction g définie sur \mathbb{R} par :

$$g(x) = e^{-x}.$$

La courbe \mathcal{C} et la courbe Γ (qui représente la fonction f de la Partie I) sont tracées sur le **graphique donné en annexe qui est à compléter et à rendre avec la copie**.

Le but de cette partie est de déterminer le point de la courbe \mathcal{C} le plus proche de l'origine O du repère et d'étudier la tangente à \mathcal{C} en ce point.

- Pour tout nombre réel t , on note M le point de coordonnées $(t; e^{-t})$ de la courbe \mathcal{C} .

On considère la fonction h qui, au nombre réel t , associe la distance OM .

On a donc : $h(t) = OM$, c'est-à-dire :

$$h(t) = \sqrt{t^2 + e^{-2t}}$$

- (a) Montrer que, pour tout nombre réel t ,

$$h'(t) = \frac{f(t)}{\sqrt{t^2 + e^{-2t}}}.$$

où f désigne la fonction étudiée dans la **Partie I**.

- (b) Démontrer que le point A de coordonnées $(\alpha; e^{-\alpha})$ est le point de la courbe \mathcal{C} pour lequel la longueur OM est minimale.

Placer ce point sur le **graphique donné en annexe, à rendre avec la copie**.

2. On appelle T la tangente en A à la courbe \mathcal{C} .

(a) Exprimer en fonction de α le coefficient directeur de la tangente T .

On rappelle que le coefficient directeur de la droite (OA) est égal à $\frac{e^{-\alpha}}{\alpha}$.

On rappelle également le résultat suivant qui pourra être utilisé sans démonstration:

Dans un repère orthonormé du plan, deux droites D et D' de coefficients directeurs respectifs m et m' sont perpendiculaires si, et seulement si le produit mm' est égal à -1 .

(b) Démontrer que la droite (OA) et la tangente T sont perpendiculaires.

Tracer ces droites sur le **graphique donné en annexe, à rendre avec la copie**.

Annexe à compléter et à rendre avec la copie

