

**Commun à tous les candidats**
**Partie I**

On considère la fonction  $f$  définie sur  $\mathbb{R}$  par

$$f(x) = x - e^{-2x}.$$

On appelle  $\Gamma$  la courbe représentative de la fonction  $f$  dans un repère orthonormé  $(O ; \vec{i}, \vec{j})$ .

1. Déterminer les limites de la fonction  $f$  en  $-\infty$  et en  $+\infty$ .
2. Étudier le sens de variation de la fonction  $f$  sur  $\mathbb{R}$  et dresser son tableau de variation.
3. Montrer que l'équation  $f(x) = 0$  admet une unique solution  $\alpha$  sur  $\mathbb{R}$ , dont on donnera une valeur approchée à  $10^{-2}$  près.
4. Déduire des questions précédentes le signe de  $f(x)$  suivant les valeurs de  $x$ .

**Partie II**

Dans le repère orthonormé  $(O ; \vec{i}, \vec{j})$ , on appelle  $\mathcal{C}$  la courbe représentative de la fonction  $g$  définie sur  $\mathbb{R}$  par:

$$g(x) = e^{-x}.$$

La courbe  $\mathcal{C}$  et la courbe  $\Gamma$  (qui représente la fonction  $f$  de la Partie I) sont tracées sur le **graphique donné en annexe qui est à compléter et à rendre avec la copie**.

Le but de cette partie est de déterminer le point de la courbe  $\mathcal{C}$  le plus proche de l'origine O du repère et d'étudier la tangente à  $\mathcal{C}$  en ce point.

1. Pour tout nombre réel  $t$ , on note  $M$  le point de coordonnées  $(t ; e^{-t})$  de la courbe  $\mathcal{C}$ .

On considère la fonction  $h$  qui, au nombre réel  $t$ , associe la distance  $OM$ .

On a donc:  $h(t) = OM$ , c'est-à-dire :

$$h(t) = \sqrt{t^2 + e^{-2t}}$$

- (a) Montrer que, pour tout nombre réel  $t$ ,

$$h'(t) = \frac{f(t)}{\sqrt{t^2 + e^{-2t}}}.$$

où  $f$  désigne la fonction étudiée dans la **Partie I**.

- (b) Démontrer que le point A de coordonnées  $(\alpha ; e^{-\alpha})$  est le point de la courbe  $\mathcal{C}$  pour lequel la longueur  $OM$  est minimale.

Placer ce point sur le **graphique donné en annexe, à rendre avec la copie**.

2. On appelle  $T$  la tangente en  $A$  à la courbe  $\mathcal{C}$ .

(a) Exprimer en fonction de  $\alpha$  le coefficient directeur de la tangente  $T$ .

On rappelle que le coefficient directeur de la droite (OA) est égal à  $\frac{e^{-\alpha}}{\alpha}$ .

On rappelle également le résultat suivant qui pourra être utilisé sans démonstration:

*Dans un repère orthonormé du plan, deux droites  $D$  et  $D'$  de coefficients directeurs respectifs  $m$  et  $m'$  sont perpendiculaires si, et seulement si le produit  $mm'$  est égal à  $-1$ .*

(b) Démontrer que la droite (OA) et la tangente  $T$  sont perpendiculaires.

Tracer ces droites sur le **graphique donné en annexe, à rendre avec la copie**.

### Annexe à compléter et à rendre avec la copie

