EXERCICE B

Principaux domaines abordés: Fonction logarithme népérien, dérivation

Cet exercice est composé de deux parties.

Certains résultats de la première partie seront utilisés dans la deuxième.

Partie 1 : Étude d'une fonction auxiliaire

Soit la fonction f définie sur l'intervalle [1 ; 4] par :

$$f(x) = -30x + 50 + 35\ln x.$$

1. On rappelle que f' désigne la fonction dérivée de la fonction f.

   (a) Pour tout nombre réel x de l'intervalle [1 ; 4], montrer que:

   $$f'(x) = \frac{35 - 30x}{x}.$$

   (b) Dresser le tableau de signe de $f'(x)$ sur l'intervalle [1 ; 4].

   (c) En déduire les variations de f sur ce même intervalle.

2. Justifier que l'équation $f(x) = 0$ admet une unique solution, notée α, sur l'intervalle [1 ; 4] puis donner une valeur approchée de α à 10^{-3} près.

3. Dresser le tableau de signe de $f(x)$ pour $x \in [1\ ;\ 4]$.

Partie 2 : Optimisation

Une entreprise vend du jus de fruits. Pour x milliers de litres vendus, avec x nombre réel de l'intervalle [1 ; 4], l'analyse des ventes conduit à modéliser le bénéfice $B(x)$ par l'expression donnée en milliers d'euros par :

$$B(x) = -15x^2 + 15x + 35x\ln x.$$

1. D'après le modèle, calculer le bénéfice réalisé par l'entreprise lorsqu'elle vend 2,500 litres de jus de fruits.

   On donnera une valeur approchée à l'euro près de ce bénéfice.

2. Pour tout x de l'intervalle [1 ; 4], montrer que $B'(x) = f(x)$ où B' désigne la fonction dérivée de B.

3. (a) À l'aide des résultats de la **partie 1**, donner les variations de la fonction B sur l'intervalle [1 ; 4].

   (b) En déduire la quantité de jus de fruits, au litre près, que l'entreprise doit vendre afin de réaliser un bénéfice maximal.