On considère la suite (u_n) définie par: $\begin{cases} u_1 & = & \dfrac{1}{\mathrm{e}} \\ u_{n+1} & = & \dfrac{1}{\mathrm{e}}\left(1+\dfrac{1}{n}\right) u_n \end{cases}$ pour tout entier $n \geqslant 1$.

1. Calculer les valeurs exactes de u_2 et u_3. On détaillera les calculs.

2. On considère une fonction écrite en langage Python qui, pour un entier naturel n donné, affiche le terme u_n. Compléter les lignes L_2 et L_4 de ce programme.

L_1	`def suite(n):`
L_2	`  ..................`
L_3	`  for i in range(1, n):`
L_4	`    u=..................`
L_5	`return u`

3. On admet que tous les termes de la suite (u_n) sont strictement positifs.
   (a) Montrer que pour tout entier naturel n non nul, on a : $1+\dfrac{1}{n} \leqslant \mathrm{e}$.
   (b) En déduire que la suite (u_n) est décroissante.
   (c) La suite (u_n) est-elle convergente ? Justifier votre réponse.

4. (a) Montrer par récurrence que pour tout entier naturel non nul, on a : $u_n = \dfrac{n}{\mathrm{e}^n}$.
   (b) En déduire, si elle existe, la limite de la suite (u_n).