On considère la fonction f définie sur $]0\ ;\ +\infty[$ par

$$f(x) = x^2 - 8\ln(x)$$

où ln désigne la fonction logarithme népérien.

On admet que f est dérivable sur $]0\ ;\ +\infty[$, on note f' sa fonction dérivée.

1. Déterminer $\lim\limits_{x\to 0} f(x)$.

2. On admet que, pour tout $x > 0$, $f(x) = x^2\left(1 - 8\dfrac{\ln(x)}{x^2}\right)$.

   En déduire la limite: $\lim\limits_{x\to +\infty} f(x)$.

3. Montrer que, pour tout réel x de $]0\ ;\ +\infty[$, $f'(x) = \dfrac{2\left(x^2-4\right)}{x}$.

4. Étudier les variations de f sur $]0\ ;\ +\infty[$ et dresser son tableau de variations complet.

   On précisera la valeur exacte du minimum de f sur $]0\ ;\ +\infty[$.

5. Démontrer que, sur l'intervalle]0 ; 2], l'équation $f(x) = 0$ admet une solution unique α (on ne cherchera pas à déterminer la valeur de α).

6. On admet que, sur l'intervalle $[2\ ;\ +\infty[$, l'équation $f(x) = 0$ admet une solution unique β (on ne cherchera pas à déterminer la valeur de β).

   En déduire le signe de f sur l'intervalle $]0\ ;\ +\infty[$.

7. Pour tout nombre réel k, on considère la fonction g_k définie sur $]0\ ;\ +\infty[$ par:

$$g_k(x) = x^2 - 8\ln(x) + k.$$

   En s'aidant du tableau de variations de f, déterminer la plus petite valeur de k pour laquelle la fonction g_k est positive sur l'intervalle $]0\ ;\ +\infty[$.