

On considère la fonction f définie sur \mathbb{R} par :

$$f(x) = e^{3x} - (2x + 1)e^x$$

Le but de cet exercice est d'étudier la fonction f sur \mathbb{R} .

Partie A - Étude d'une fonction auxiliaire

On définit la fonction g sur \mathbb{R} par :

$$g(x) = 3e^{2x} - 2x - 3$$

- (a) Déterminer la limite de la fonction g en $-\infty$.
(b) Déterminer la limite de la fonction g en $+\infty$.
- (a) On admet que la fonction g est dérivable sur \mathbb{R} , et on note g' sa fonction dérivée. Démontrer que pour tout nombre réel x , on a $g'(x) = 6e^{2x} - 2$.
(b) Étudier le signe de la fonction dérivée g' sur \mathbb{R} .
(c) En déduire le tableau de variations de la fonction g sur \mathbb{R} . Vérifier que la fonction g admet un minimum égal à $\ln(3) - 2$.
- (a) Montrer que $x = 0$ est solution de l'équation $g(x) = 0$.
(b) Montrer que l'équation $g(x) = 0$ admet une deuxième solution, non nulle, notée α , dont on donnera un encadrement d'amplitude 10^{-1} .
- Déduire des questions précédentes le signe de la fonction g sur \mathbb{R} .

Partie B - Étude de la fonction f

- La fonction f est dérivable sur \mathbb{R} , et on note f' sa fonction dérivée.
Démontrer que pour tout nombre réel x , on a $f'(x) = e^x g(x)$, où g est la fonction définie dans la **partie A**.
- En déduire alors le signe de la fonction dérivée f' puis les variations de la fonction f sur \mathbb{R} .
- Pourquoi la fonction f n'est-elle pas convexe sur \mathbb{R} ? Expliquer.