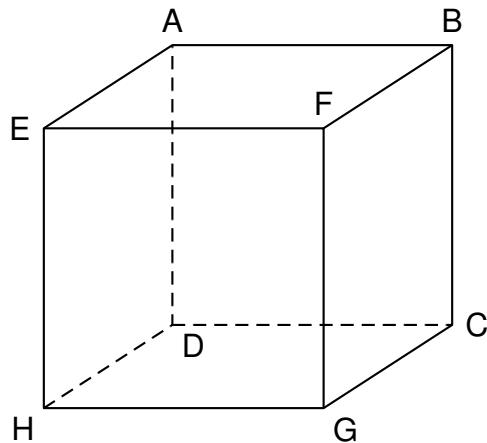


On considère le cube ABCDEFGH ci-dessous tel que $AB = 1$.
 On note M le centre de la face BCGF et N le centre de la face EFGH.



On se place dans le repère orthonormé $(D ; \overrightarrow{DH}, \overrightarrow{DC}, \overrightarrow{DA})$.

1. Donner sans justifier les coordonnées des points F et C.
2. Calculer les coordonnées des points M et N.
3. (a) Démontrer que le vecteur \overrightarrow{AG} est normal au plan (HFC).
 (b) En déduire une équation cartésienne du plan (HFC).
4. Déterminer une représentation paramétrique de la droite (AG).
5. Démontrer que le point R de coordonnées $\left(\frac{2}{3}; \frac{2}{3}; \frac{1}{3}\right)$ est le projeté orthogonal du point G sur le plan (HFC).
6. On admet qu'une représentation paramétrique de la droite (FG) est:

$$\begin{cases} x = 1 \\ y = 1 \\ z = t \end{cases} \quad (t \in \mathbb{R}).$$

Démontrer qu'il existe un unique point K sur la droite (FG) tel que le triangle KMN soit rectangle en K.

7. Quelle fraction du volume du cube ABCDEFGH le volume du tétraèdre FNKM représente-t-il ?