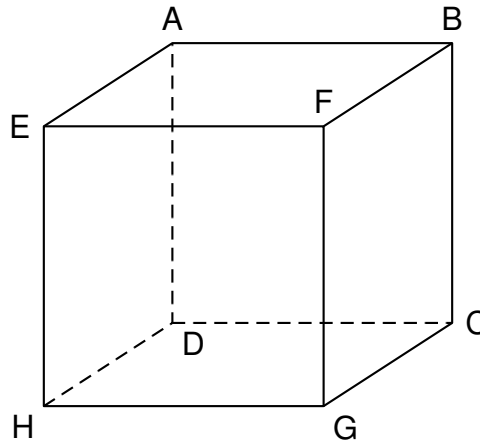


On considère le cube ABCDEFGH ci-dessous tel que $AB = 1$.
On note M le centre de la face BCGF et N le centre de la face EFGH.



On se place dans le repère orthonormé $(D; \overrightarrow{DH}, \overrightarrow{DC}, \overrightarrow{DA})$.

- Donner sans justifier les coordonnées des points F et C.
- Calculer les coordonnées des points M et N.
- Démontrer que le vecteur \overrightarrow{AG} est normal au plan (HFC).
 - En déduire une équation cartésienne du plan (HFC).
- Déterminer une représentation paramétrique de la droite (AG).
- Démontrer que le point R de coordonnées $(\frac{2}{3}; \frac{2}{3}; \frac{1}{3})$ est le projeté orthogonal du point G sur le plan (HFC).
- On admet qu'une représentation paramétrique de la droite (FG) est:

$$\begin{cases} x = 1 \\ y = 1 \\ z = t \end{cases} \quad (t \in \mathbb{R}).$$

Démontrer qu'il existe un unique point K sur la droite (FG) tel que le triangle KMN soit rectangle en K.

- Quelle fraction du volume du cube ABCDEFGH le volume du tétraèdre FNKM représente-t-il ?