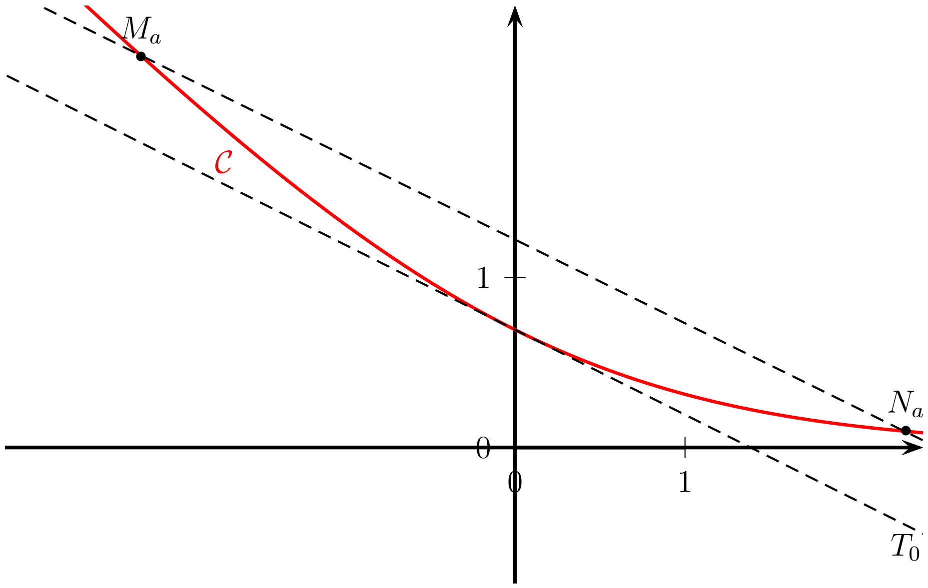
On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par

$$f(x) = \ln\left(1 + \mathrm{e}^{-x}\right),$$

où ln désigne la fonction logarithme népérien.

On note $\mathcal{C}$ sa courbe représentative dans un repère orthonormé $\left(\mathrm{O}\,;\ \vec{\imath},\ \vec{\jmath}\right)$.

La courbe $\mathcal{C}$ est tracée ci-dessous.



1. (a) Déterminer la limite de la fonction f en $-\infty$.
   (b) Déterminer la limite de la fonction f en $+\infty$.
   Interpréter graphiquement ce résultat.
   (c) On admet que la fonction f est dérivable sur $\mathbb{R}$ et on note f' sa fonction dérivée.
   Calculer $f'(x)$ puis montrer que, pour tout nombre réel x, $f'(x) = \dfrac{-1}{1+\mathrm{e}^{x}}$.
   (d) Dresser le tableau de variations complet de la fonction f sur $\mathbb{R}$.

2. On note T_0 la tangente à la courbe $\mathcal{C}$ en son point d'abscisse 0.
   (a) Déterminer une équation de la tangente T_0.
   (b) Montrer que la fonction f est convexe sur $\mathbb{R}$.
   (c) En déduire que, pour tout nombre réel x, on a :
   $$f(x) \geqslant -\frac{1}{2}x + \ln(2).$$

3. Pour tout nombre réel a différent de 0, on note M_a et N_a les points de la courbe $\mathcal{C}$ d'abscisses respectives $-a$ et a.
   On a donc : $M_a\,(-a\,;\ f(-a))$ et $N_a\,(a\,;\ f(a))$.
   (a) Montrer que, pour tout nombre réel x, on a : $f(x) - f(-x) = -x$.
   (b) En déduire que les droites T_0 et (M_aN_a) sont parallèles.

COOPMATHS cc BY SA
MathALÉA