PARTIE A

On définit sur l'intervalle $]0\,;\,+\infty[$ la fonction g par :

$$g(x) = \frac{2}{x} - \frac{1}{x^2} + \ln x \quad \text{où ln désigne la fonction logarithme népérien.}$$

On admet que la fonction g est dérivable sur $]0\,;\,+\infty[= I$ et on note g' sa fonction dérivée.

1. Montrer que pour $x > 0$, le signe de $g'(x)$ est celui du trinôme du second degré $(x^2 - 2x + 2)$.
2. En déduire que la fonction g est strictement croissante sur $]0\,;\,+\infty[$.
3. Montrer que l'équation $g(x) = 0$ admet une unique solution sur l'intervalle [0,5 ; 1], que l'on notera α.
4. On donne le tableau de signes de g sur l'intervalle $]0\,;\,+\infty[= I$:

x	0		α		$+\infty$
$g(x)$	‖	$-$	0	$+$	

   Justifier ce tableau de signes à l'aide des résultats obtenus aux questions précédentes.

PARTIE B

On considère la fonction f définie sur l'intervalle $]0\,;\,+\infty[= I$ par:

$$f(x) = \mathrm{e}^x \ln x.$$

On note $\mathcal{C}_f$ la courbe représentative de f dans un repère orthonormé.

1. On admet que la fonction f est deux fois dérivable sur $]0\,;\,+\infty[$, on note f' sa fonction dérivée, f'' sa fonction dérivée seconde et on admet que :

   pour tout nombre réel $x > 0$, $f'(x) = \mathrm{e}^x\left(\frac{1}{x} + \ln x\right)$.

   Démontrer que, pour tout nombre réel $x > 0$, on a : $f''(x) = \mathrm{e}^x\left(\frac{2}{x} - \frac{1}{x^2} + \ln x\right)$.
2. On pourra remarquer que pour tout réel $x > 0$, $f''(x) = \mathrm{e}^x \times g(x)$, où g désigne la fonction étudiée dans la partie A.
3. (a) Dresser le tableau de signes de la fonction f'' sur $]0\,;\,+\infty[$. Justifier.

   (b) Justifier que la courbe $\mathcal{C}_f$ admet un unique point d'inflexion A.

   (c) Étudier la convexité de la fonction f sur l'intervalle $]0\,;\,+\infty[$. Justifier.
4. (a) Calculer les limites de f aux bornes de son ensemble de définition.

   (b) Montrer que $f'(\alpha) = \frac{\mathrm{e}^\alpha}{\alpha^2}(1 - \alpha)$.
   On rappelle que α est l'unique solution de l'équation $g(x) = 0$.

   (c) Démontrer que $f'(\alpha) > 0$ et en déduire le signe de $f'(x)$ pour x appartenant à $]0\,;\,+\infty[$.

   (d) En déduire le tableau de variations complet de la fonction f sur $]0\,;\,+\infty[$.