

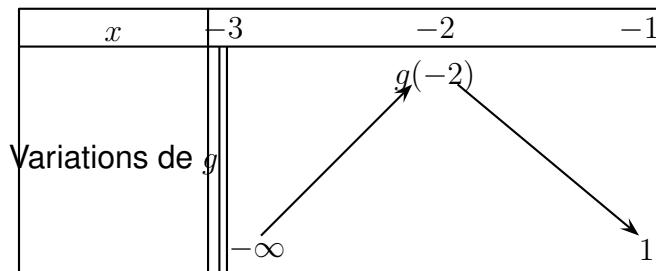
Soit  $(u_n)$  la suite définie par  $u_0 = -1$  et, pour tout entier naturel  $n$  :

$$u_{n+1} = 0,9u_n - 0,3.$$

1. (a) Démontrer par récurrence que, pour tout  $n \in \mathbb{N}$ ,  $u_n = 2 \times 0,9^n - 3$ .
  - (b) En déduire que pour tout  $n \in \mathbb{N}$ ,  $-3 < u_n \leq -1$ .
  - (c) Démontrer que la suite  $(u_n)$  est strictement décroissante.
  - (d) Démontrer que la suite  $(u_n)$  converge et préciser sa limite.
2. On se propose d'étudier la fonction  $g$  définie sur  $]-3 ; -1]$  par :

$$g(x) = \ln(0,5x + 1,5) - x.$$

- (a) Justifier toutes les informations données par le tableau de variations de la fonction  $g$  (limites, variations, image de  $-1$ )



- (b) En déduire que l'équation  $g(x) = 0$  a exactement une solution que l'on notera  $\alpha$  et dont on donnera un encadrement d'amplitude  $10^{-3}$ .
3. Dans la suite de l'exercice, on considère la suite  $(v_n)$  définie pour tout  $n \in \mathbb{N}$ , par :

$$v_n = \ln(0,5u_n + 1,5).$$

- (a) En utilisant la formule donnée à la question 1. a., démontrer que la suite  $v$  est arithmétique de raison  $\ln(0,9)$ .
- (b) Soit  $n$  un entier naturel.  
Démontrer que  $u_n = v_n$  si, et seulement si  $g(u_n) = 0$ .
- (c) Démontrer qu'il n'existe aucun rang  $k \in \mathbb{N}$  pour lequel  $u_k = \alpha$ .
- (d) En déduire qu'il n'existe aucun rang  $k \in \mathbb{N}$  pour lequel  $v_k = u_k$ .