

Dans l'espace rapporté à un repère orthonormé $(O ; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$, on considère :

- le plan \mathcal{P}_1 dont une équation cartésienne est $2x + y - z + 2 = 0$,
- le plan \mathcal{P}_2 passant par le point $B(1 ; 1 ; 2)$ et dont un vecteur normal est $\vec{n}_2 \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$.

1. (a) Donner les coordonnées d'un vecteur \vec{n}_1 normal au plan \mathcal{P}_1 .
(b) On rappelle que deux plans sont perpendiculaires si un vecteur normal à l'un des plans est orthogonal à un vecteur normal à l'autre plan.
Montrer que les plans \mathcal{P}_1 et \mathcal{P}_2 sont perpendiculaires.
2. (a) Déterminer une équation cartésienne du plan \mathcal{P}_2 .

(b) On note Δ la droite dont une représentation paramétrique est : $\begin{cases} x = 0 \\ y = -2 + t \\ z = t \end{cases}, \quad t \in \mathbb{R}$.

Montrer que la droite Δ est l'intersection des plans \mathcal{P}_1 et \mathcal{P}_2 .

On considère le point $A(1 ; 1 ; 1)$ et on admet que le point A n'appartient ni à \mathcal{P}_1 ni à \mathcal{P}_2 .

On note H le projeté orthogonal du point A sur la droite Δ .

3. On rappelle que, d'après la question 2. b, la droite Δ est l'ensemble des points M_t de coordonnées $(0 ; -2 + t ; t)$, où t désigne un nombre réel quelconque.
 - Montrer que, pour tout réel t , $AM_t = \sqrt{2t^2 - 8t + 11}$.
 - En déduire que $AH = \sqrt{3}$.
4. On note \mathcal{D}_1 la droite orthogonale au plan \mathcal{P}_1 passant par le point A et H_1 le projeté orthogonal du point A sur le plan \mathcal{P}_1 .
 - Déterminer une représentation paramétrique de la droite \mathcal{D}_1 .
 - En déduire que le point H_1 a pour coordonnées $\left(-\frac{1}{3} ; \frac{1}{3} ; \frac{5}{3}\right)$.

5. Soit H_2 le projeté orthogonal de A sur le plan \mathcal{P}_2 .

On admet que H_2 a pour coordonnées $\left(\frac{4}{3}; \frac{2}{3}; \frac{4}{3}\right)$ et que H a pour coordonnées $(0; 0; 2)$.

Sur le schéma ci-contre, les plans \mathcal{P}_1 et \mathcal{P}_2 sont représentés, ainsi que les points A , H_1 , H_2 , H .

Montrer que AH_1HH_2 est un rectangle.

