Dans l'espace muni d'un repère orthonormé $\left(O\,;\ \vec{\imath},\ \vec{\jmath},\ \vec{k}\right)$, on considère les points

$$A(0\,;4\,;16),\quad B(0\,;\,4\,;\,-10),\quad C(4\,;\,-8\,;\,0)\quad \text{et}\quad K(0\,;4\,;3).$$

On définit la sphère S de centre K et de rayon 13 comme l'ensemble des points M tels que KM $= 13$.

1. (a) Vérifier que le point C appartient à la sphère S
   (b) Montrer que le triangle ABC est rectangle en C.
2. (a) Montrer que le vecteur $\vec{n}\begin{pmatrix}3\\1\\0\end{pmatrix}$ est un vecteur normal au plan (ABC).
   (b) Déterminer une équation cartésienne du plan (ABC).
3. On admet que la sphère S coupe l'axe des abscisses en deux points, l'un ayant une abscisse positive et l'autre une abscisse négative.
   On note D celui qui a une abscisse positive.
   (a) Montrer que le point D a pour coordonnées (12 ; 0 ; 0).
   (b) Donner une représentation paramétrique de la droite Δ passant par D et perpendiculaire au plan (ABC).
   (c) Déterminer la distance du point D au plan (ABC).
4. Calculer une valeur approchée, à l'unité de volume près, du volume du tétraèdre ABCD.
   On rappelle la formule du volume V d'un tétraèdre

$$V = \frac{1}{3} \times \mathcal{B} \times h.$$

où $\mathcal{B}$ est l'aire d'une base et h la hauteur associée.