

On considère la fonction f définie sur \mathbb{R} par

$$f(x) = \frac{3}{4}x^2 - 2x + 3.$$

1. Dresser le tableau de variations de f sur \mathbb{R} .
2. En déduire, que pour tout x appartenant à l'intervalle $\left[\frac{4}{3}; 2\right]$, $f(x)$ appartient à l'intervalle $\left[\frac{4}{3}; 2\right]$.
3. Démontrer que pour tout x réel, $x \leq f(x)$.

Pour cela, on pourra démontrer que pour tout réel x :

$$f(x) - x = \frac{3}{4}(x - 2)^2.$$

On considère la suite (u_n) définie par un réel u_0 et pour tout entier naturel n :

$$u_{n+1} = f(u_n).$$

On a donc, pour tout entier naturel n ,

$$u_{n+1} = \frac{3}{4}u_n^2 - 2u_n + 3.$$

4. Étude du cas: $\frac{4}{3} \leq u_0 \leq 2$.

(a) Démontrer par récurrence que, pour tout entier naturel n ,

$$u_n \leq u_{n+1} \leq 2.$$

(b) En déduire que la suite (u_n) est convergente.

(c) Prouver que la limite de la suite est égale à 2.

5. Étude du cas particulier : $u_0 = 3$.

On admet que dans ce cas la suite (u_n) tend vers $+\infty$.

Recopier et compléter la fonction `seuil` suivante écrite en Python, afin qu'elle renvoie la plus petite valeur de n telle que u_n soit supérieur ou égal à 100.

```
def seuil() :
    u = 3
    n = 0
    while ...
        u = ...
        n = ...
    return n
```

6. Étude du cas : $u_0 > 2$.

À l'aide d'un raisonnement par l'absurde, montrer que (u_n) n'est pas convergente.