Exercice BAC 2023 Amérique du Sud - Ex 2

Géométrie dans l'espace | Équation de plan | Produit scalaire | Sphère | Projeté orthogonal | Intersection de plans

Dans un repère orthonormé $\left(\text{O} ; \vec{\imath}, \vec{\jmath}, \vec{k}\right)$ on considère les points :

$$\text{A}(1 ; 1 ; -4), \quad \text{B}(2 ; -1 ; -3), \quad \text{C}(0 ; -1 ; -1) \quad \text{et} \quad \Omega(1 ; 1 ; 2).$$

1. Démontrer que les points A, B et C définissent un plan.
2. (a) Démontrer que le vecteur $\vec{n}$ de coordonnées $\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}$ est normal au plan (ABC).

   (b) Justifier qu'une équation cartésienne du plan (ABC) est $x + y + z + 2 = 0$.
3. (a) Justifier que le point Ω n'appartient pas au plan (ABC).

   (b) Déterminer les coordonnées du point H, projeté orthogonal du point Ω sur le plan (ABC).

On admet que $\Omega\text{H} = 2\sqrt{3}$.

On définit la sphère S de centre Ω et de rayon $2\sqrt{3}$ comme l'ensemble de tous les points M de l'espace tels que $\Omega\text{M} = 2\sqrt{3}$.

4. Justifier, sans calcul, que tout point N du plan (ABC), distinct de H, n'appartient pas à la sphère S.

   On dit qu'un plan $\mathcal{P}$ est tangent à la sphère S en un point K lorsque les deux conditions suivantes sont vérifiées :

   - $\text{K} \in \mathcal{P} \cap S$
   - $(\Omega\text{K}) \perp \mathcal{P}$
5. Soit le plan $\mathcal{P}$ d'équation cartésienne $x + y - z - 6 = 0$ et le point K de coordonnées K(3 ; 3 ; 0).

   Démontrer que le plan $\mathcal{P}$ est tangent à la sphère S au point K.
6. On admet que les plans (ABC) et $\mathcal{P}$ sont sécants selon une droite (Δ).

   Déterminer une équation paramétrique de la droite (Δ).