Partie A

Le but de la partie A est d'étudier le comportement de la suite (u_n) définie par $u_0 = 0,3$ et par la relation de récurrence, pour tout entier naturel n :

$$u_{n+1} = 2u_n\left(1 - u_n\right).$$

Cette relation de récurrence s'écrit $u_{n+1} = f\left(u_n\right)$, où f est la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x) = 2x\left(1 - x\right).$$

1. Démontrer que la fonction f est strictement croissante sur l'intervalle $\left[0\,;\,\frac{1}{2}\right]$.
2. On admet que pour tout entier naturel n, $0 \leqslant u_n \leqslant \frac{1}{2}$.

   Calculer u_1 puis effectuer un raisonnement par récurrence pour démontrer que pour tout rentier naturel $n,\ u_n \leqslant u_{n+1}$.
3. En déduire que la suite (u_n) est convergente.
4. Justifier que la limite de la suite (u_n) est égale à $\frac{1}{2}$.

Partie B

Le but de cette partie est d'étudier un modèle d'évolution d'une population.
En 2022, cette population compte 3,000 individus.
On note P_n l'effectif en milliers de la population l'année $2022 + n$. Ainsi $P_0 = 3$.
Selon un modèle inspiré du modèle de Verhulst, mathématicien belge du XIXe siècle, on considère que, pour tout entier naturel n :

$$P_{n+1} - P_n = P_n\left(1 - b \times P_n\right), \text{ où } b \text{ est un réel strictement positif.}$$

Le réel b est un facteur de freinage qui permet de tenir compte du caractère limité des ressources du milieu dans lequel évoluent ces individus.

1. Dans cette question $b = 0$.
   (a) Justifier que la suite (P_n) est une suite géométrique dont on précisera la raison.
   (b) Déterminer la limite de P_n.
2. Dans cette question $b = 0,2$.
   (a) Pour tout entier naturel n, on pose $v_n = 0,1 \times P_n$.
   Calculer v_0 puis montrer que, pour tout entier naturel n, $v_{n+1} = 2v_n\left(1 - v_n\right)$.
   (b) Dans ce modèle, justifier que la population se stabilisera autour d'une valeur que l'on précisera.