

On considère la suite (u_n) définie par $u_0 = 3$ et, pour tout entier naturel n , par :

$$u_{n+1} = 5u_n - 4n - 3.$$

1. (a) Démontrer que $u_1 = 12$.
 (b) Déterminer u_2 en détaillant le calcul.
 (c) À l'aide de la calculatrice, conjecturer le sens de variation ainsi que la limite de la suite (u_n) .
2. (a) Démontrer par récurrence que, pour tout entier naturel n , on a :

$$u_n \geq n + 1.$$

- (b) En déduire la limite de la suite (u_n) .
3. On considère la suite (v_n) définie pour tout entier naturel n par :

$$v_n = u_n - n - 1.$$

- (a) Démontrer que la suite (v_n) est géométrique.
 Donner sa raison et son premier terme v_0 .
- (b) En déduire, pour tout entier naturel n , l'expression de v_n en fonction de n .
- (c) En déduire que pour tout entier naturel n :

$$u_n = 2 \times 5^n + n + 1.$$

- (d) En déduire le sens de variation de la suite (u_n) .
4. On considère la fonction ci-contre, écrite de manière incomplète en langage Python et destinée à renvoyer le plus petit entier naturel n tel que $u_n \geq 10^7$.
 (a) Recopier le programme et compléter les deux instructions manquantes.
 (b) Quelle est la valeur renvoyée par cette fonction ?

```
def suite() :  
    u = 3  
    n = 0  
    while ... :  
        u = ...  
        n = n + 1  
    return n
```