

On considère la suite  $(u_n)$  définie par  $u_0 = 3$  et, pour tout entier naturel  $n$ , par:

$$u_{n+1} = 5u_n - 4n - 3.$$

1. (a) Démontrer que  $u_1 = 12$ .  
 (b) Déterminer  $u_2$  en détaillant le calcul.  
 (c) À l'aide de la calculatrice, conjecturer le sens de variation ainsi que la limite de la suite  $(u_n)$ .
2. (a) Démontrer par récurrence que, pour tout entier naturel  $n$ , on a :

$$u_n \geq n + 1.$$

- (b) En déduire la limite de la suite  $(u_n)$ .
3. On considère la suite  $(v_n)$  définie pour tout entier naturel  $n$  par:

$$v_n = u_n - n - 1.$$

- (a) Démontrer que la suite  $(v_n)$  est géométrique.  
 Donner sa raison et son premier terme  $v_0$ .
- (b) En déduire, pour tout entier naturel  $n$ , l'expression de  $v_n$  en fonction de  $n$ .
- (c) En déduire que pour tout entier naturel  $n$  :

$$u_n = 2 \times 5^n + n + 1.$$

- (d) En déduire le sens de variation de la suite  $(u_n)$ .
4. On considère la fonction ci-contre, écrite de manière incomplète en langage Python et destinée à renvoyer le plus petit entier naturel  $n$  tel que  $u_n \geq 10^7$ .
- (a) Recopier le programme et compléter les deux instructions manquantes.
- (b) Quelle est la valeur renvoyée par cette fonction ?

```
def suite():
    u = 3
    n = 0
    while ...:
        u = ...
        n = n + 1
    return n
```