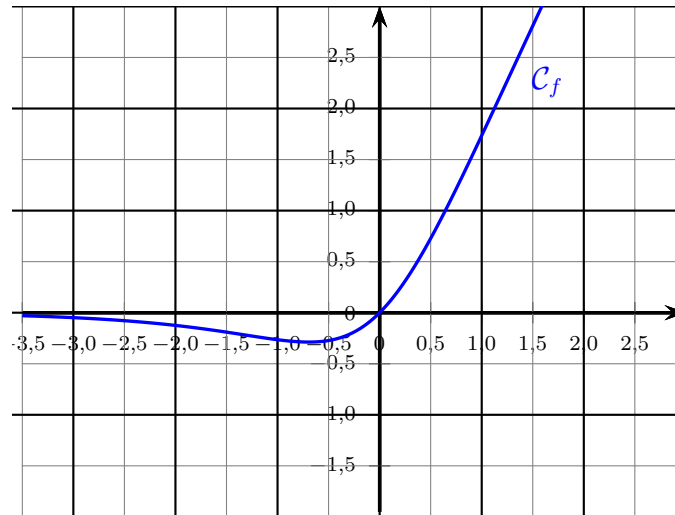


On considère la fonction  $f$  définie sur  $\mathbb{R}$  par

$$f(x) = \ln(e^{2x} - e^x + 1).$$

On note  $\mathcal{C}_f$  sa courbe représentative représentée ci-dessous.



Un élève formule les conjectures suivantes à partir de cette représentation graphique :

1. L'équation  $f(x) = 2$  semble admettre au moins une solution.
2. Le plus grand intervalle sur lequel la fonction  $f$  semble être croissante est  $[-0,5 ; +\infty[$ .
3. L'équation de la tangente au point d'abscisse  $x = 0$  semble être:  $y = 1,5x$ .

Le but de cet exercice est de valider ou rejeter les conjectures concernant la fonction  $f$ .

## Partie A : Étude d'une fonction auxiliaire

On définit sur  $\mathbb{R}$  la fonction  $g$  définie par

$$g(x) = e^{2x} - e^x + 1.$$

1. Déterminer  $\lim_{x \rightarrow -\infty} g(x)$ .
2. Montrer que  $\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = +\infty$ .
3. Montrer que  $g'(x) = e^x(2e^x - 1)$  pour tout  $x \in \mathbb{R}$ .
4. Étudier le sens de variation de la fonction  $g$  sur  $\mathbb{R}$ .

Dresser le tableau des variations de la fonction  $g$  en y faisant figurer la valeur exacte des extremums s'il y en a, ainsi que les limites de  $g$  en  $-\infty$  et  $+\infty$ .

5. En déduire le signe de  $g$  sur  $\mathbb{R}$ .
6. Sans en mener nécessairement les calculs, expliquer comment on pourrait établir le résultat de la question 5 en posant  $X = e^x$ .

## Partie B

1. Justifier que la fonction  $f$  est bien définie sur  $\mathbb{R}$ .

2. La fonction dérivée de la fonction  $f$  est notée  $f'$ .

Justifier que  $f'(x) = \frac{g'(x)}{g(x)}$  pour tout  $x \in \mathbb{R}$ .

3. Déterminer une équation de la tangente à la courbe au point d'abscisse 0.

4. Montrer que la fonction  $f$  est strictement croissante sur  $[-\ln(2) ; +\infty[$ .

5. Montrer que l'équation  $f(x) = 2$  admet une unique solution  $\alpha$  sur  $[-\ln(2) ; +\infty[$  et déterminer une valeur approchée de  $\alpha$  à  $10^{-2}$  près.

### Partie C

À l'aide des résultats de la partie B, indiquer, pour chaque conjecture de l'élève, si elle est vraie ou fausse. Justifier.