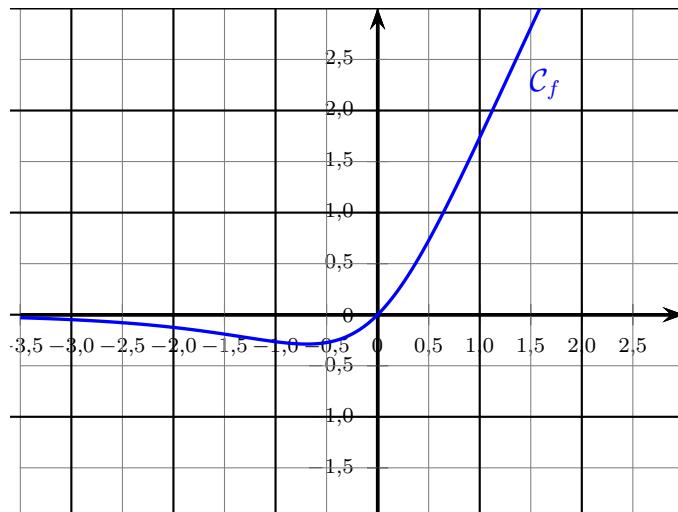


On considère la fonction f définie sur \mathbb{R} par

$$f(x) = \ln(e^{2x} - e^x + 1).$$

On note \mathcal{C}_f sa courbe représentative représentée ci-dessous.



Un élève formule les conjectures suivantes à partir de cette représentation graphique :

1. L'équation $f(x) = 2$ semble admettre au moins une solution.
2. Le plus grand intervalle sur lequel la fonction f semble être croissante est $[-0,5 ; +\infty[$.
3. L'équation de la tangente au point d'abscisse $x = 0$ semble être: $y = 1,5x$.

Le but de cet exercice est de valider ou rejeter les conjectures concernant la fonction f .

Partie A : Étude d'une fonction auxiliaire

On définit sur \mathbb{R} la fonction g définie par

$$g(x) = e^{2x} - e^x + 1.$$

1. Déterminer $\lim_{x \rightarrow -\infty} g(x)$.
2. Montrer que $\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = +\infty$.
3. Montrer que $g'(x) = e^x (2e^x - 1)$ pour tout $x \in \mathbb{R}$.
4. Étudier le sens de variation de la fonction g sur \mathbb{R} .

Dresser le tableau des variations de la fonction g en y faisant figurer la valeur exacte des extréums s'il y en a, ainsi que les limites de g en $-\infty$ et $+\infty$.

5. En déduire le signe de g sur \mathbb{R} .
6. Sans en mener nécessairement les calculs, expliquer comment on pourrait établir le résultat de la question 5 en posant $X = e^x$.

Partie B

1. Justifier que la fonction f est bien définie sur \mathbb{R} .

2. La fonction dérivée de la fonction f est notée f' .

Justifier que $f'(x) = \frac{g'(x)}{g(x)}$ pour tout $x \in \mathbb{R}$.

3. Déterminer une équation de la tangente à la courbe au point d'abscisse 0.

4. Montrer que la fonction f est strictement croissante sur $[-\ln(2) ; +\infty[$.

5. Montrer que l'équation $f(x) = 2$ admet une unique solution α sur $[-\ln(2) ; +\infty[$ et déterminer une valeur approchée de α à 10^{-2} près.

Partie C

À l'aide des résultats de la partie B, indiquer, pour chaque conjecture de l'élève, si elle est vraie ou fausse. Justifier.