On se place dans l'espace rapporté à un repère orthonormé $\left(\mathrm{O}\,;\,\vec{\imath}\,,\,\vec{\jmath}\,,\,\vec{k}\right)$.

On considère le point A(1 ; 1 ; 0) et le vecteur $\vec{u}\begin{pmatrix}0\\2\\-1\end{pmatrix}$.

On considère le plan $\mathcal{P}$ d'équation : $x+4y+2z+1=0$.

1. On note (d) la droite passant par A et dirigée par le vecteur $\vec{u}$.
   Déterminer une représentation paramétrique de (d).
2. Justifier que la droite (d) et le plan $\mathcal{P}$ sont sécants en un point B dont les coordonnées sont (1 ; -1 ; 1).
3. On considère le point C$(1\,;\,-1\,;\,-1)$.
   (a) Vérifier que les points A, B et C définissent bien un plan.
   (b) Montrer que le vecteur $\vec{n}\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}$ est un vecteur normal au plan (ABC).
   (c) Déterminer une équation cartésienne du plan (ABC).
4. (a) Justifier que le triangle ABC est isocèle en A.
   (b) Soit H le milieu du segment [BC].
   Calculer la longueur AH puis l'aire du triangle ABC.
5. Soit D le point de coordonnées $(0\,;\,-1\,;\,1)$.
   (a) Montrer que la droite (BD) est une hauteur de la pyramide ABCD.
   (b) Déduire des questions précédentes le volume de la pyramide ABCD.

On rappelle que le volume V d'une pyramide est donné par:

$$V=\frac{1}{3}\mathcal{B}\times h,$$

où $\mathcal{B}$ est l'aire d'une base et h la hauteur correspondante.

COOPMATHS CC BY SA

MathALÉA