On considère la fonction f définie sur $[0\ ;\ +\infty[$ par:

$$f(x) = x\mathrm{e}^{-x}.$$

On note $\mathcal{C}_f$ sa courbe représentative dans un repère orthonormé du plan.
On admet que f est deux fois dérivable sur $[0\ ;\ +\infty[$.
On note f' sa dérivée et f'' sa dérivée seconde.

1. En remarquant que pour tout x dans $[0\ ;\ +\infty[$, on a

$$f(x) = \frac{x}{\mathrm{e}^x}.$$

démontrer que la courbe $\mathcal{C}_f$ possède une asymptote en $+\infty$ dont on donnera une équation.

2. Démontrer que pour tout réel x appartenant à $[0\ ;\ +\infty[$:

$$f'(x) = (1-x)\mathrm{e}^{-x}.$$

3. Dresser le tableau de variations de f sur $[0\ ;\ +\infty[$, sur lequel on fera figurer les valeurs aux bornes ainsi que la valeur exacte de l'extremum.

4. Déterminer, sur l'intervalle $[0\ ;\ +\infty[$, le nombre de solutions de l'équation

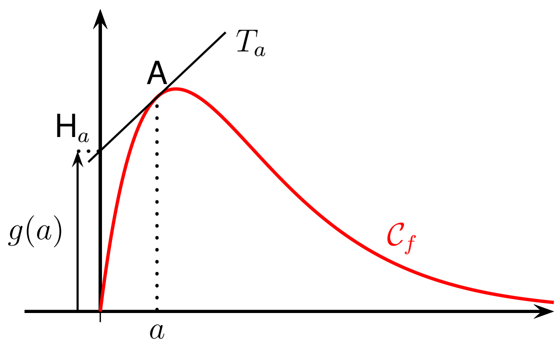
$$f(x) = \frac{367}{1{,}000}.$$

5. On admet que pour tout x appartenant à $[0\ ;\ +\infty[$:

$$f''(x) = \mathrm{e}^{-x}(x-2).$$

Étudier la convexité de la fonction f sur l'intervalle $[0\ ;\ +\infty[$.

6. Soit a un réel appartenant à $[0\ ;\ +\infty[$ et A le point de la courbe $\mathcal{C}_f$ d'abscisse a.
On note T_a la tangente à $\mathcal{C}_f$ en A.
On note H$_a$ le point d'intersection de la droite T_a et de l'axe des ordonnées.
On note $g(a)$ l'ordonnée de H$_a$.
La situation est représentée sur la figure ci-contre.



   (a) Démontrer qu'une équation réduite de la tangente T_a est:

$$y = \left[(1-a)\mathrm{e}^{-a}\right]x + a^2\mathrm{e}^{-a}.$$

   (b) En déduire l'expression de $g(a)$.

   (c) Démontrer que $g(a)$ est maximum lorsque A est un point d'inflexion de la courbe $\mathcal{C}_f$.
   Les traces de recherche, même incomplètes ou infructueuses, seront valorisées.