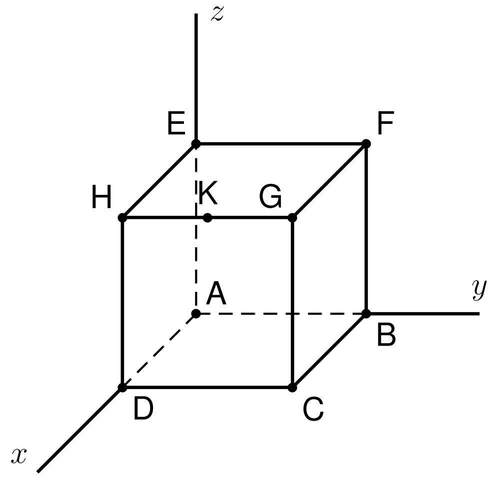
On considère le cube ABCDEFGH d'arête 1 représenté ci-contre.
On note K le milieu du segment [HG].
On se place dans le repère orthonormé $\left(A\ ;\ \overrightarrow{AD},\ \overrightarrow{AB},\ \overrightarrow{AE}\right)$.



1. Justifier que les points C, F et K définissent un plan.
2. (a) Donner, sans justifier, les longueurs KG, GF et GC.
   (b) Calculer l'aire du triangle FGC.
   (c) Calculer le volume du tétraèdre FGCK.

On rappelle que le volume V d'un tétraèdre est donné par:

$$V = \frac{1}{3}\mathcal{B} \times h,$$

où $\mathcal{B}$ est l'aire d'une base et h la hauteur correspondante.

3. (a) On note $\overrightarrow{n}$ le vecteur de coordonnées $\begin{pmatrix}1\\2\\1\end{pmatrix}$.
   Démontrer que $\overrightarrow{n}$ est normal au plan (CFK).
   (b) En déduire qu'une équation cartésienne du plan (CFK) est:
   $$x + 2y + z - 3 = 0.$$
4. On note Δ la droite passant par le point G et orthogonale au plan (CFK).
   Démontrer qu'une représentation paramétrique de la droite Δ est:
   $$\left\{\begin{array}{rcl} x &=& 1+t\\ y &=& 1+2t \qquad (t \in \mathbb{R}))\\ z &=& 1+t\end{array}\right.$$
5. Soit L le point d'intersection entre la droite Δ et le plan (CFK).
   (a) Déterminer les coordonnées du point L.
   (b) En déduire que $\text{LG} = \frac{\sqrt{6}}{6}$.
6. En utilisant la question 2., déterminer la valeur exacte de l'aire du triangle CFK.