Les parties A et B peuvent être traitées indépendamment

Partie A

On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par

$$f(x) = \left(x + \frac{1}{2}\right)\mathrm{e}^{-x} + x.$$

1. Déterminer les limites de f en $-\infty$ et en $+\infty$.
2. On admet que f est deux fois dérivable sur $\mathbb{R}$.
   (a) Démontrer que, pour tout $x \in \mathbb{R}$,
   $$f''(x) = \left(x - \frac{3}{2}\right)\mathrm{e}^{-x}.$$
   (b) En déduire les variations et le minimum de la fonction f' sur $\mathbb{R}$.
   (c) Justifier que pour tout $x \in \mathbb{R},\ f'(x) > 0$.
   (d) En déduire que l'équation $f(x) = 0$ admet une unique solution sur $\mathbb{R}$.
   (e) Donner une valeur arrondie à 10^{-3} de cette solution.

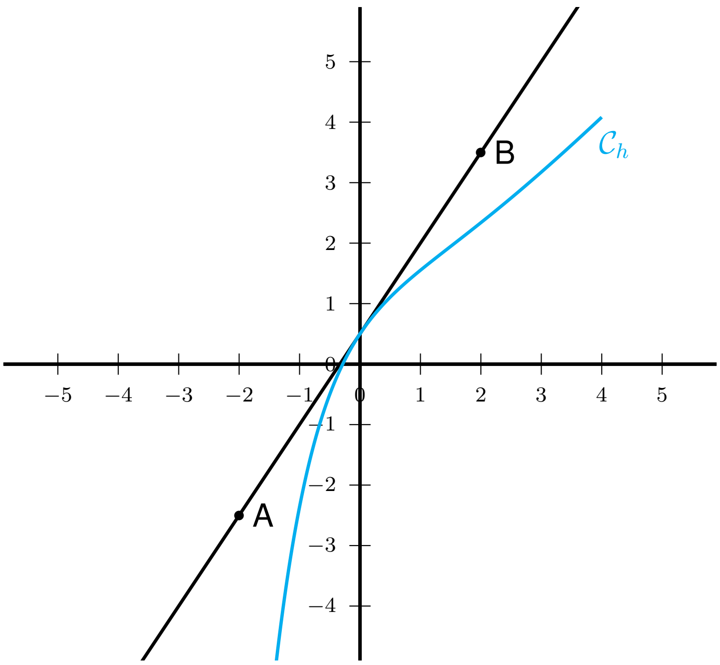
Partie B

On considère une fonction h, définie et dérivable sur $\mathbb{R}$, ayant une expression de la forme

$$h(x) = (ax + b)\mathrm{e}^{-x} + x, \text{ où } a \text{ et } b \text{ sont deux réels.}$$

Dans un repère orthonormé ci-après figurent:

- la courbe représentative $\mathcal{C}_h$ de la fonction h ;
- les points A et B de coordonnées respectives $(-2\ ;\ -2,5)$ et (2 ; 3,5).



1. Conjecturer, avec la précision permise par le graphique, les abscisses des éventuels points d'inflexion de la courbe représentative de la fonction h.

2. Sachant que la fonction h admet sur $\mathbb{R}$ une dérivée seconde d'expression

$$h''(x) = -\frac{3}{2}\mathrm{e}^{-x} + x\mathrm{e}^{-x}.$$

   valider ou non la conjecture précédente.

3. Déterminer une équation de la droite (AB).

4. Sachant que la droite (AB) est tangente à la courbe représentative de la fonction h au point d'abscisse 0, en déduire les valeurs de a et b.