On étudie un groupe de 3,000 sportifs qui pratiquent soit l'athlétisme dans le club A, soit le basketball dans le club B.

En 2023, le club A compte 1,700 membres et le club B en compte 1,300.

On décide de modéliser le nombre de membres du club A et du club B respectivement par deux suites (a_n) et (b_n), où n désigne le rang de l'année à partir de 2023.

L'année 2023 correspond au rang 0. On a alors $a_0 = 1{,}700$ et $b_0 = 1{,}300$.

Pour notre étude, on fait les hypothèses suivantes :

- durant l'étude, aucun sportif ne quitte le groupe ;
- chaque année, $15\,\%$ des sportifs du club A quittent ce club et adhèrent au club B ;
- chaque année, $10\,\%$ des sportifs du club B quittent ce club et adhèrent au club A.

1. Calculer les nombres de membres de chaque club en 2024.
2. Pour tout entier naturel n, déterminer une relation liant a_n et b_n.
3. Montrer que la suite (a_n) vérifie la relation suivante pour tout entier naturel n, on a :

$$a_{n+1} = 0,75a_n + 300.$$

4. (a) Démontrer par récurrence que pour tout entier naturel n, on a :

$$1200 \leqslant a_{n+1} \leqslant a_n \leqslant 1{,}700.$$

   (b) En déduire que la suite (a_n) converge.

5. Soit (v_n) la suite définie pour tout entier naturel n par $v_n = a_n - 1{,}200$.
   (a) Démontrer que la suite (v_n) est géométrique.
   (b) Exprimer v_n en fonction de n.
   (c) En déduire que pour tout entier naturel $n, a_n = 500 \times 0,75^n + 1{,}200$.
6. (a) Déterminer la limite de la suite (a_n).
   (b) Interpréter le résultat de la question précédente dans le contexte de l'exercice.
7. (a) Recopier et compléter le programme Python ci-dessous afin qu'il renvoie la plus petite valeur de n à partir de laquelle le nombre de membres du club A est strictement inférieur à 1,280.

```
def seuil() :
    n = 0
    A = 1,700
    while ... :
        n=n+1
        A = ...
    return...
```

   (b) Déterminer la valeur renvoyée lorsqu'on appelle la fonction seuil.