On considère la fonction f définie sur $]-1,5\ ;\ +\infty[$ par

$$f(x) = \ln(2x+3) - 1.$$

Le but de cet exercice est d'étudier la convergence de la suite (u_n) définie par :

$$u_0 = 0 \text{ et } u_{n+1} = f(u_n) \text{ pour tout entier naturel } n.$$

Partie A : Étude d'une fonction auxiliaire

On considère la fonction g définie sur $]-1,5\ ;\ +\infty[$ par $g(x) = f(x) - x$.

1. Déterminer la limite de la fonction g en $-1,5$.
   On admet que la limite de la fonction g en $+\infty$ est $-\infty$.
2. Étudier les variations de la fonction g sur $]-1,5\ ;\ +\infty[$.
3. (a) Démontrer que, dans l'intervalle $]-0,5\ ;\ +\infty[$, l'équation $g(x) = 0$ admet une unique solution α.
   (b) Déterminer un encadrement de α d'amplitude 10^{-2}.

Partie B : Étude de la suite (u_n)

On admet que la fonction f est strictement croissante sur $]-1,5\ ;\ +\infty[$.

1. Soit x un nombre réel. Montrer que si $x \in [-1\ ;\ \alpha]$ alors $f(x) \in [-1\ ;\ \alpha]$.
2. (a) Démontrer par récurrence que pour tout entier naturel n :

$$-1 \leqslant u_n \leqslant u_{n+1} \leqslant \alpha.$$

   (b) En déduire que la suite (u_n) converge.