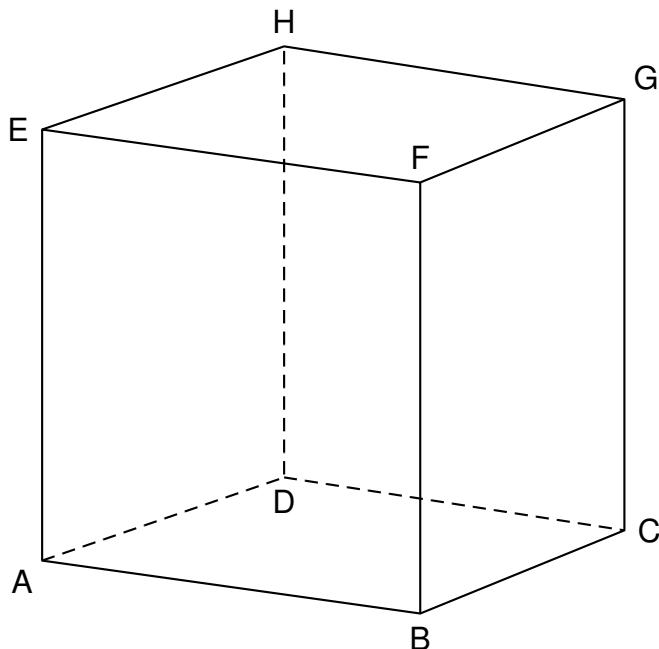


On considère le cube ABCDEFGH qui est représenté ci-dessous.



Dans le repère orthonormé $(A ; \overrightarrow{AB} ; \overrightarrow{AD} ; \overrightarrow{AE})$, on considère les points M, N et P de coordonnées :

$$M\left(1 ; 1 ; \frac{3}{4}\right), \quad N\left(0 ; \frac{1}{2} ; 1\right), \quad P\left(1 ; 0 ; -\frac{5}{4}\right)$$

Dans cet exercice, on se propose de calculer le volume du tétraèdre FMNP.

1. Donner les coordonnées des vecteurs \overrightarrow{MN} et \overrightarrow{MP} .
2. Placer les points M, N et P sur le cube ci-dessus.
3. Justifier que les points M, N et P ne sont pas alignés.
Dès lors les trois points définissent le plan (MNP).
4. (a) Calculer le produit scalaire $\overrightarrow{MN} \cdot \overrightarrow{MP}$, puis en déduire la nature du triangle MNP.
(b) Calculer l'aire du triangle MNP.
5. (a) Montrer que le vecteur $\vec{n}(5 ; -8 ; 4)$ est un vecteur normal au plan (MNP).
(b) En déduire qu'une équation cartésienne du plan (MNP) est $5x - 8y + 4z = 0$.
6. On rappelle que le point F a pour coordonnées $F(1 ; 0 ; 1)$.
Déterminer une représentation paramétrique de la droite d orthogonale au plan (MNP) et passant par le point F.
7. On note L le projeté orthogonal du point F sur le plan (MNP).

Montrer que les coordonnées du point L sont: $L\left(\frac{4}{7} ; \frac{24}{35} ; \frac{23}{35}\right)$.

8. Montrer que $FL = \frac{3\sqrt{105}}{35}$ puis calculer le volume du tétraèdre FMNP.

On rappelle que le volume V d'un tétraèdre est donné par la formule :

$$V = \frac{1}{3} \times \text{aire d'une base} \times \text{hauteur associée à cette base.}$$