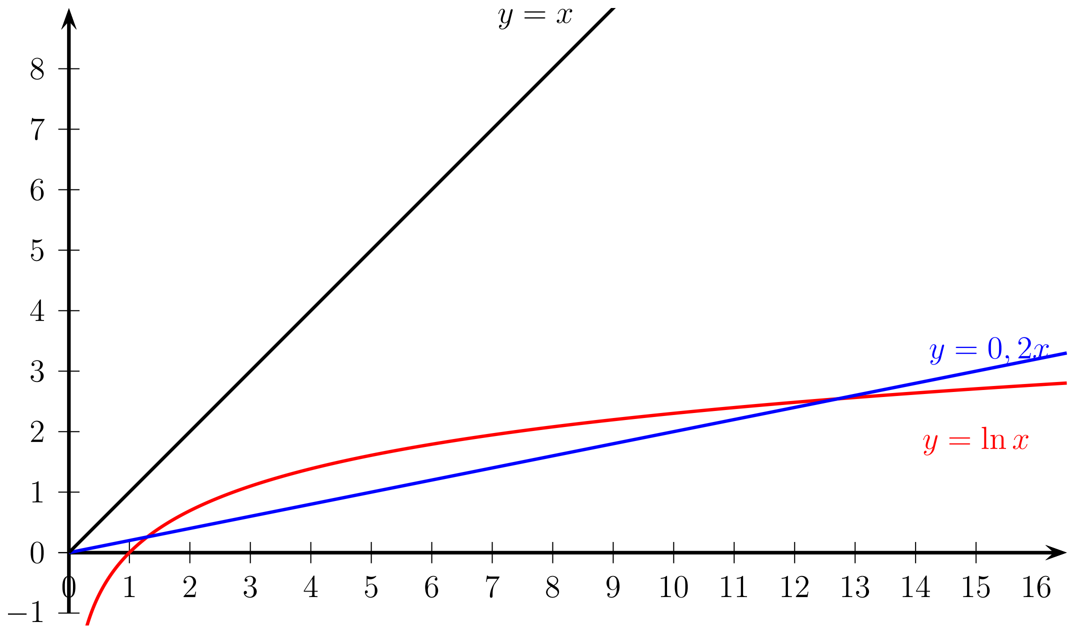
Soit k un réel strictement positif.
Le but de cet exercice est de déterminer le nombre de solutions de l'équation

$$\ln(x) = kx$$

de paramètre k.

1. **Conjectures graphiques :**

   On a représenté, ci-dessous, dans un repère orthogonal, la courbe d'équation $y = \ln(x)$, la droite d'équation $y = x$ ainsi que la droite d'équation $y = 0,2x$:



   À partir du graphique ci-dessus, conjecturer le nombre de solutions de l'équation $\ln(x) = kx$ pour $k = 1$ puis pour $k = 0,2$.

2. Étude du cas $k = 1$:

   On considère la fonction f, définie et dérivable sur $]0~;~+\infty[$, par:

   $$f(x) = \ln(x) - x.$$

   On note f' la fonction dérivée de la fonction f.

   (a) Calculer $f'(x)$.

   (b) Étudier le sens de variation de la fonction f sur $]0~;~+\infty[$.
   Dresser le tableau des variations de la fonction f en y faisant figurer la valeur exacte des extremums s'il y en a.
   Les limites aux bornes de l'intervalle de définition ne sont pas attendues.

   (c) En déduire le nombre de solutions de l'équation $\ln(x) = x$.

3. Étude du cas général :

   k est un nombre réel strictement positif.

   On considère la fonction g définie sur $]0\,;\,+\infty[$ par:

$$g(x) = \ln(x) - kx.$$

   On admet que le tableau des variations de la fonction g est le suivant :

x	0		$\dfrac{1}{k}$		$+\infty$
$g(x)$	$-\infty$	$\nearrow$	$g\left(\frac{1}{k}\right)$	$\searrow$	$-\infty$

   (a) Donner, en fonction du signe de $g\left(\dfrac{1}{k}\right)$ le nombre de solutions de l'équation $g(x) = 0$.

   (b) Calculer $g\left(\dfrac{1}{k}\right)$ en fonction du réel k.

   (c) Montrer que $g\left(\dfrac{1}{k}\right) > 0$ équivaut à $\ln(k) < -1$.

   (d) Déterminer l'ensemble des valeurs de k pour lesquelles l'équation $\ln(x) = kx$ possède exactement deux solutions.

   (e) Donner, selon les valeurs de k, le nombre de solutions de l'équation $\ln(x) = kx$.