On considère la fonction f définie sur l'intervalle $]0\ ;\ +\infty[$ par

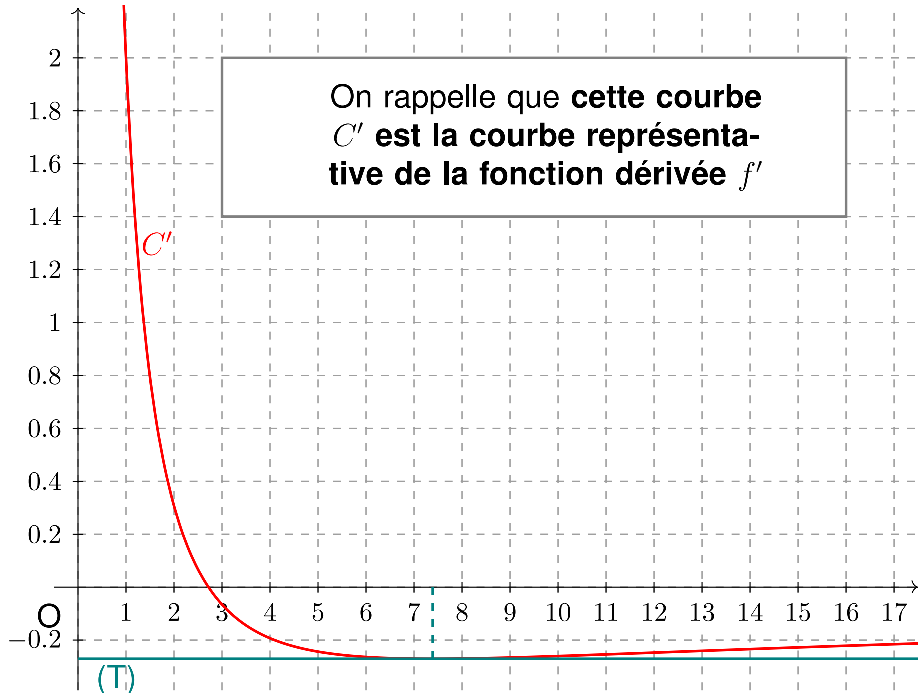
$$f(x) = (2 - \ln x) \times \ln x,$$

où $\ln$ désigne la fonction logarithme népérien.

On admet que la fonction f est deux fois dérivable sur $]0\ ;\ +\infty[$.

On note C la courbe représentative de la fonction f dans un repère orthogonal et C' la courbe représentative de la fonction f', fonction dérivée de la fonction f.

La **courbe C'** est donnée ci-dessous ainsi que son unique tangente horizontale (T).



1. Par lecture graphique, avec la précision que permet le tracé ci-dessus, donner :
   (a) le coefficient directeur de la tangente à C au point d'abscisse 1.
   (b) le plus grand intervalle sur lequel la fonction f est convexe.

2. (a) Calculer la limite de la fonction f en $+\infty$.
   (b) Calculer $\lim\limits_{x \to 0} f(x)$. Interpréter graphiquement ce résultat.

3. Montrer que la courbe C coupe l'axe des abscisses en deux points exactement dont on précisera les coordonnées.

4. (a) Montrer que pour tout réel x appartenant à $]0\ ;\ +\infty[$, $\quad f'(x) = \dfrac{2(1 - \ln x)}{x}$.
   (b) En déduire, en justifiant, le tableau de variations de la fonction f sur $]0\ ;\ +\infty[$.

5. On note f'' la dérivée seconde de f et on admet que pour tout réel x appartenant à $]0\ ;\ +\infty[$, $f''(x) = \dfrac{2(\ln x - 2)}{x^2}$.
   Déterminer par le calcul le plus grand intervalle sur lequel la fonction f est convexe et préciser les coordonnées du point d'inflexion de la courbe C.