On considère la fonction f définie sur $]0\ ;\ +\infty[$ par:

$$\boldsymbol{f(x) = 3x + 1 - 2x\ln(x).}$$

On admet que la fonction f est deux fois dérivable sur $]0\ ;\ +\infty[$.
On note f' sa dérivée et f'' sa dérivée seconde.
On note $\mathcal{C}_f$ sa courbe représentative dans un repère du plan.

1. Déterminer la limite de la fonction f en 0 et en $+\infty$.

2. (a) Démontrer que pour tout réel x strictement positif : $f'(x) = 1 - 2\ln(x)$.
   (b) Étudier le signe de f' et dresser le tableau de variation de la fonction f sur l'intervalle $]0\ ;\ +\infty[$.
   On fera figurer dans ce tableau les limites ainsi que la valeur exacte de l'extremum.

3. (a) Démontrer que l'équation $f(x) = 0$ admet une unique solution sur $]0\ ;\ +\infty[$. On notera α cette solution.
   (b) En déduire le signe de la fonction f sur $]0\ ;\ +\infty[$.

4. On considère une primitive quelconque de la fonction f sur l'intervalle $]0\ ;\ +\infty[$. On la note F.

   Peut-on affirmer que la fonction F est strictement décroissante sur l'intervalle $\left[\mathrm{e}^{\frac{1}{2}}\ ;\ +\infty\right[$? Justifier.

5. (a) Étudier la convexité de la fonction f sur $]0\ ;\ +\infty[$.
   Quelle est la position de la courbe $\mathcal{C}_f$ par rapport à ses tangentes ?
   (b) Déterminer une équation de la tangente T à la courbe $\mathcal{C}_f$ au point d'abscisse 1.
   (c) Déduire des questions 5. a et 5 .b que pour tout réel x strictement positif:

$$\ln(x) \geqslant 1 - \frac{1}{x}.$$

.