Soit la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par

$$f(x) = \ln\left(1 + \mathrm{e}^{-x}\right) + \frac{1}{4}x.$$

On note $\mathcal{C}_f$ la courbe représentative de la fonction f dans un repère orthonormé $\left(\mathrm{O}\ ;\ \vec{\imath},\ \vec{\jmath}\right)$ du plan.

Partie A

1. Déterminer la limite de f en $+\infty$.
2. On admet que la fonction f est dérivable sur $\mathbb{R}$ et on note f' sa fonction dérivée.
   (a) Montrer que, pour tout réel x, $f'(x) = \dfrac{\mathrm{e}^x - 3}{4\left(\mathrm{e}^x + 1\right)}$.
   (b) En déduire les variations de la fonction f sur $\mathbb{R}$.
   (c) Montrer que l'équation $f(x) = 1$ admet une unique solution α dans l'intervalle [2 ; 5].

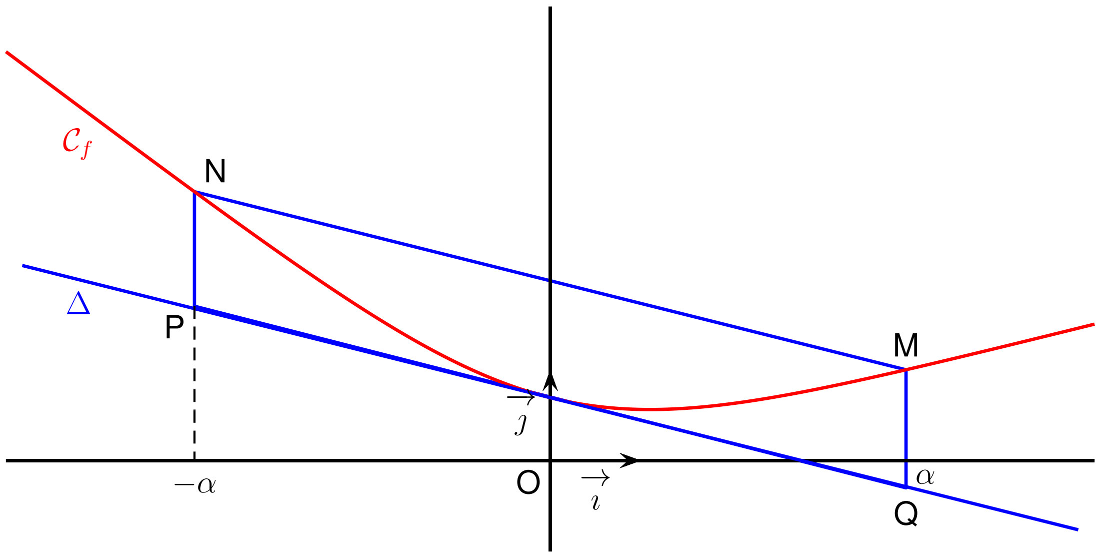
Partie B

On admettra que la fonction f' est dérivable sur $\mathbb{R}$ et pour tout réel x,

$$f''(x) = \frac{\mathrm{e}^x}{\left(\mathrm{e}^x + 1\right)^2}.$$

On note Δ la tangente à la courbe $\mathcal{C}_f$ au point d'abscisse 0.

Dans le graphique ci-dessous, on a représenté la courbe $\mathcal{C}_f$ la tangente Δ et le quadrilatère MNPQ tel que M et N sont les deux points de la courbe $\mathcal{C}_f$ d'abscisses respectives α et $-\alpha$, et Q et P sont les deux points de la droite Δ d'abscisses respectives α et $-\alpha$.



1. (a) Justifier le signe de $f''(x)$ pour $x \in \mathbb{R}$.
   (b) En déduire que la portion de la courbe $\mathcal{C}_f$ sur l'intervalle $[-\alpha\ ;\ \alpha]$, est inscrite dans le quadrilatère MNPQ.
2. (a) Montrer que $f(-\alpha) = \ln\left(\mathrm{e}^{-\alpha} + 1\right) + \dfrac{3}{4}\alpha$.
   (b) Démontrer que le quadrilatère MNPQ est un parallélogramme.