Partie A

On considère la fonction f définie par :

$$f(x) = x - \ln(1+x).$$

1. Justifier que la fonction f est définie sur l'intervalle $]-1\,;\,+\infty[$.
2. On admet que la fonction f est dérivable sur $]-1\,;\,+\infty[$.
   Déterminer l'expression de sa fonction dérivée $f'(x)$.
3. (a) En déduire le sens de variation de la fonction f sur l'intervalle $]-1\,;\,+\infty[$.
   (b) En déduire le signe de la fonction f sur l'intervalle $]-1\,;\,0[$.
4. (a) Montrer que, pour tout x appartenant à l'intervalle $]-1\,;\,+\infty[$, on a :
   $f(x) = \ln\left(\dfrac{\mathrm{e}^x}{1+x}\right)$.
   (b) En déduire la limite en $+\infty$ de la fonction f.

Partie B

On considère la suite (u_n) définie par $u_0 = 10$ et, pour tout entier naturel n,

$$u_{n+1} = u_n - \ln\left(1+u_n\right).$$

On admet que la suite (u_n) est bien définie.

1. Donner la valeur arrondie au millième de u_1.
2. En utilisant la question 3. a. de la partie A, démontrer par récurrence que, pour tout entier naturel n, on a $u_n \geqslant 0$.
3. Démontrer que la suite (u_n) est décroissante.
4. Déduire des questions précédentes que la suite (u_n) converge.
5. Déterminer la limite de la suite (u_n).