On considère la suite (u_n) définie par $u_0 = 8$ et, pour tout entier naturel n,

$$u_{n+1} = \frac{6u_n + 2}{u_n + 5}.$$

1. Calculer u_1.
2. Soit f la fonction définie sur l'intervalle $[0\ ;\ +\infty[$ par :

$$f(x) = \frac{6x + 2}{x + 5}.$$

Ainsi, pour tout entier naturel n, on a : $u_{n+1} = f(u_n)$.

(a) Démontrer que la fonction f est strictement croissante sur l'intervalle $[0\ ;\ +\infty[$.
En déduire que pour tout réel $x > 2$, on a $f(x) > 2$.

(b) Démontrer par récurrence que, pour tout entier naturel n, on a $u_n > 2$.

3. On admet que, pour tout entier naturel n, on a :

$$u_{n+1} - u_n = \frac{(2 - u_n)(u_n + 1)}{u_n + 5}.$$

(a) Démontrer que la suite (u_n) est décroissante.

(b) En déduire que la suite (u_n) est convergente.

4. On définit la suite (v_n) pour tout entier naturel par:

$$v_n = \frac{u_n - 2}{u_n + 1}.$$

(a) Calculer v_0.

(b) Démontrer que (v_n) est une suite géométrique de raison $\frac{4}{7}$.

(c) Déterminer, en justifiant, la limite de (v_n).
En déduire la limite de (u_n).

5. On considère la fonction Python seuil ci-contre, où A est un nombre réel strictement plus grand que 2.

Donner, sans justification, la valeur renvoyée par la commande seuil (2.001) puis interpréter cette valeur dans le contexte de l'exercice.

```
def seuil (A) :
    n = 0
    u = 8
    while u > A :
        u = (6*u + 2)/(u + 5)
        n = n + 1
    return n
```