Exercice BAC 2025 Amérique du Nord - Ex 2

Suites numériques | Raisonnement par récurrence | Limites | Algorithme Python | Suite auxiliaire

On considère la suite numérique (u_n) définie par son premier terme $u_0 = 2$ et pour tout entier naturel n, par :

$$u_{n+1} = \frac{2u_n + 1}{u_n + 2}$$

On admet que la suite (u_n) est bien définie.

1. Calculer le terme u_1.
2. On définit la suite (a_n) pour tout entier naturel n, par :

$$a_n = \frac{u_n}{u_n - 1}$$

   On admet que la suite (a_n) est bien définie.

   (a) Calculer a_0 et a_1.

   (b) Démontrer que, pour tout entier naturel n, $a_{n+1} = 3a_n - 1$.

   (c) Démontrer par récurrence que, pour tout entier naturel n supérieur ou égal à 1,

$$a_n \geqslant 3n - 1$$

   (d) En déduire la limite de la suite (a_n).

3. On souhaite étudier la limite de la suite (u_n).

   (a) Démontrer que pour tout entier naturel n, $u_n = \dfrac{a_n}{a_n - 1}$.

   (b) En déduire la limite de la suite (u_n).

4. On admet que la suite (u_n) est décroissante.
   On considère le programme suivant écrit en langage Python :

```python
def algo(p):
  u=2
  n=0
  while u-1>p:
    u=(2*u+1)/(u+2)
    n=n+1
  return (n,u)
```

   (a) Interpréter les valeurs `n` et `u` renvoyées par l'appel de la fonction `algo(p)` dans le contexte de l'exercice.

   (b) Donner, sans justifier, la valeur de n pour $p = 0,001$.