On munit le plan d'un repère orthonormé.
Pour tout entier naturel n, on considère la fonction f_n définie sur $[0\ ;\ +\infty[$ par :

$$f_0(x) = \mathrm{e}^{-x} \quad \text{et, pour } n \geqslant 1,\ f_n(x) = x^n \mathrm{e}^{-x}.$$

Pour tout entier naturel n, on note $\mathcal{C}_n$ la courbe représentative de la fonction f_n.

Les parties A *et* B *sont indépendantes.*

Partie A : Étude des fonctions f_n pour $n \geqslant 1$

On considère un entier naturel $n \geqslant 1$.

1. (a) On admet que la fonction f_n est dérivable sur $[0\ ;\ +\infty[$.
   Montrer que pour tout $x \geqslant 0$,

   $$f_n'(x) = (n - x)x^{n-1}\mathrm{e}^{-x}.$$

   (b) Justifier tous les éléments du tableau ci-dessous:

x	0		n		$+\infty$
$f_n'(x)$		$+$	0	$-$	
f_n	0	$\nearrow$	$\left(\frac{n}{\mathrm{e}}\right)^n$	$\searrow$	0

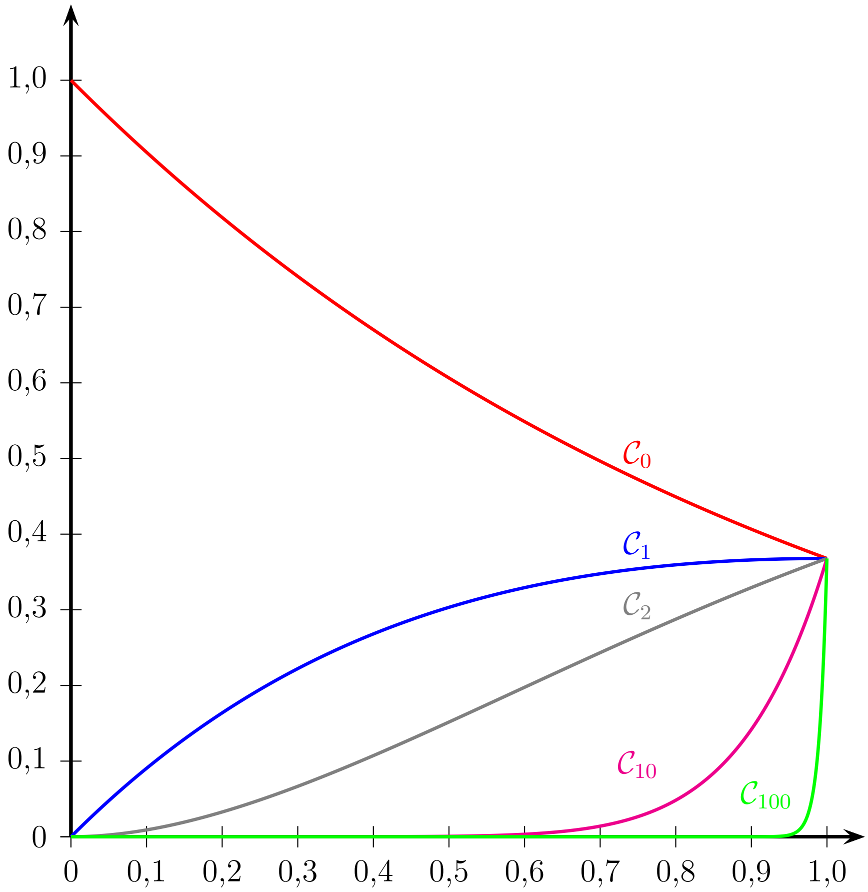
2. Justifier par le calcul que le point A$(1\ ;\ \mathrm{e}^{-1})$ appartient à la courbe $\mathcal{C}_n$.

Partie B : Étude des intégrales $\displaystyle\int_0^1 f_n(x)\,\mathrm{d}x$ pour $n \geqslant 0$

Dans cette partie, on étudie les fonctions f_n sur [0 ;1] et on considère la suite (I_n) définie pour tout entier naturel n par:

$$I_n = \int_0^1 f_n(x)\,\mathrm{d}x = \int_0^1 x^n \mathrm{e}^{-x}\,\mathrm{d}x.$$

1. Sur le graphique ci-dessous, on a représenté les courbes $\mathcal{C}_0, \mathcal{C}_1, \mathcal{C}_2, \mathcal{C}_{10}$ et $\mathcal{C}_{100}$.



(a) Donner une interprétation graphique de I_0.

(b) Par lecture de ce graphique, quelle conjecture peut-on émettre sur la limite de la suite (I_n) ?

2. Calculer I_0.

3. (a) Soit n un entier naturel.
Démontrer que pour tout $x \in [0 \ ; \ 1]$,

$$0 \leqslant x^{n+1} \leqslant x^n.$$

(b) En déduire que pour tout entier naturel n, on a :

$$0 \leqslant I_{n+1} \leqslant I_n.$$

4. Démontrer que la suite (I_n) est convergente, vers une limite positive ou nulle que l'on notera ℓ.

5. En utilisant une intégration par parties, démontrer que pour tout entier naturel n on a :

$$I_{n+1} = (n+1)I_n - \frac{1}{\mathrm{e}}.$$

6. (a) Démontrer que si $\ell > 0$, l'égalité de la question 5 conduit à une contradiction.

(b) Démontrer que $\ell = 0$. On pourra utiliser la question 6. a.

On donne ci-dessous le script de la fonction mystere, écrite en langage Python.
On a importé la constante e.

[frame=single] def mystere(n): l = 1 - 1/e L = [l] for i in range(n): l = (i + 1)*l - 1/e L.append(l) return L

7. Que renvoie mystere(100) dans le contexte de l'exercice ?