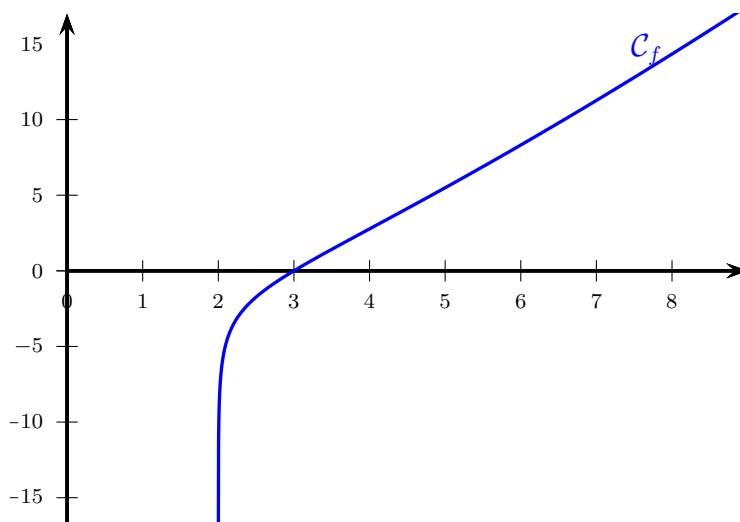


On considère la fonction f définie sur l'intervalle $]2 ; +\infty[$ par

$$f(x) = x \ln(x - 2).$$

Une partie de la courbe représentative \mathcal{C}_f de la fonction f est donnée ci-dessous.



1. Conjecturer, à l'aide du graphique, le sens de variation de f ses limites aux bornes de son ensemble de définition ainsi que les éventuelles asymptotes.
2. Résoudre l'équation $f(x) = 0$ sur $]2 ; +\infty[$.
3. Calculer $\lim_{\substack{x \rightarrow 2 \\ x > 2}} f(x)$.

Ce résultat confirme-t-il l'une des conjectures faites à la question 1. ?

4. Démontrer que pour tout x appartenant à $]2 ; +\infty[$:

$$f'(x) = \ln(x - 2) + \frac{x}{x - 2}.$$

5. On considère la fonction g définie sur l'intervalle $]2 ; +\infty[$ par $g(x) = f'(x)$.

- (a) Démontrer que pour tout x appartenant à $]2 ; +\infty[$, on a :

$$g'(x) = \frac{x - 4}{(x - 2)^2}.$$

- (b) On admet que $\lim_{\substack{x \rightarrow 2 \\ x > 2}} g(x) = +\infty$ et que $\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = +\infty$.

En déduire le tableau des variations de la fonction g sur $]2 ; +\infty[$. On fera apparaître la valeur exacte de l'extremum de la fonction g .

- (c) En déduire que, pour tout x appartenant à $]2 ; +\infty[$, $g(x) > 0$.
- (d) En déduire le sens de variation de la fonction f sur $]2 ; +\infty[$.

6. Étudier la convexité de la fonction f sur $]2 ; +\infty[$ et préciser les coordonnées d'un éventuel point d'inflexion de la courbe représentative de la fonction f .
7. Combien de valeurs de x existe-t-il pour lesquelles la courbe représentative de f admet une tangente de coefficient directeur égal à 3 ?