

Un des objectifs de cet exercice est de déterminer une approximation du nombre réel  $\ln(2)$ , en utilisant une des méthodes du mathématicien anglais Henry Briggs au XVI<sup>e</sup> siècle.

On désigne par  $(u_n)$  la suite définie par :

$$u_0 = 2 \quad \text{et, pour tout entier naturel } n, \quad u_{n+1} = \sqrt{u_n}$$

### Partie A

- Donner la valeur exacte de  $u_1$  et de  $u_2$ .
  - Émettre une conjecture, à l'aide de la calculatrice, sur le sens de variation et la limite éventuelle de la suite.
- Montrer par récurrence que pour tout entier naturel  $n$ ,  $1 \leq u_{n+1} \leq u_n$ .
  - En déduire que la suite  $(u_n)$  est convergente.
  - Résoudre dans l'intervalle  $[0 ; +\infty[$  l'équation  $\sqrt{x} = x$ .
  - Déterminer, en justifiant, la limite de la suite  $(u_n)$ .

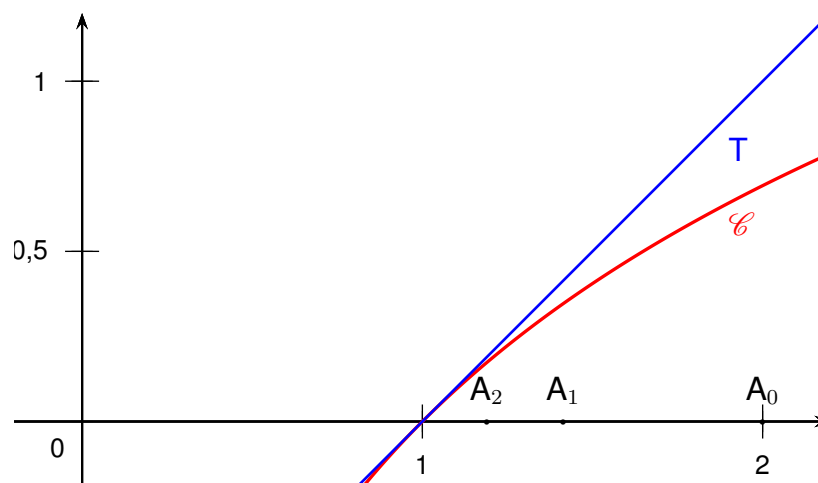
### Partie B

On désigne par  $(v_n)$  la suite définie pour tout entier naturel  $n$  par  $v_n = \ln(u_n)$ .

- Démontrer que la suite  $(v_n)$  est géométrique de raison  $\frac{1}{2}$ .
  - Exprimer  $v_n$  en fonction de  $n$ , pour tout entier naturel  $n$ .
  - En déduire que, pour tout entier naturel  $n$ ,  $\ln(2) = 2^n \ln(u_n)$ .
- On a tracé ci-dessous dans un repère orthonormé la courbe  $\mathcal{C}$  de la fonction  $\ln$  et la tangente  $T$  à la courbe  $\mathcal{C}$  au point d'abscisse 1.

Une équation de la droite  $T$  est  $y = x - 1$ .

Les points  $A_0, A_1, A_2$  ont pour abscisses respectives  $u_0, u_1$  et  $u_2$  et pour ordonnée 0.



On décide de prendre  $x-1$  comme approximation de  $\ln(x)$  lorsque  $x$  appartient à l'intervalle  $]0,99 ; 1,01[$ .

- (a) Déterminer à l'aide de la calculatrice le plus petit entier naturel  $k$  tel que  $u_k$  appartienne à l'intervalle  $]0,99 ; 1,01[$  et donner une valeur approchée de  $u_k$  à  $10^{-5}$  près.
- (b) En déduire une approximation de  $\ln(u_k)$ .
- (c) Déduire des questions 1. c. et 2. b. de la **partie B** une approximation de  $\ln(2)$ .

3. On généralise la méthode précédente à tout réel  $a$  strictement supérieur à 1.

Recopier et compléter l'algorithme ci-dessous afin que l'appel `Briggs(a)` renvoie une approximation de  $\ln(a)$ .

On rappelle que l'instruction en langage Python `sqrt(a)` correspond à  $\sqrt{a}$ .

```
from math import*
def Briggs(a):
    n = 0
    while a >= 1.01:
        a = sqrt(a)
        n = n+1
    L = ...
    return L
```

Pour chacune des affirmations suivantes, indiquer si elle est vraie ou fausse. Chaque réponse doit être justifiée.

Une réponse non justifiée ne rapporte aucun point.