

Un des objectifs de cet exercice est de déterminer une approximation du nombre réel $\ln(2)$, en utilisant une des méthodes du mathématicien anglais Henry Briggs au XVI^e siècle.

On désigne par (u_n) la suite définie par :

$$u_0 = 2 \quad \text{et, pour tout entier naturel } n, \quad u_{n+1} = \sqrt{u_n}$$

Partie A

1. (a) Donner la valeur exacte de u_1 et de u_2 .
 (b) Émettre une conjecture, à l'aide de la calculatrice, sur le sens de variation et la limite éventuelle de la suite.
2. (a) Montrer par récurrence que pour tout entier naturel n , $1 \leq u_{n+1} \leq u_n$.
 (b) En déduire que la suite (u_n) est convergente.
 (c) Résoudre dans l'intervalle $[0 ; +\infty[$ l'équation $\sqrt{x} = x$.
 (d) Déterminer, en justifiant, la limite de la suite (u_n) .

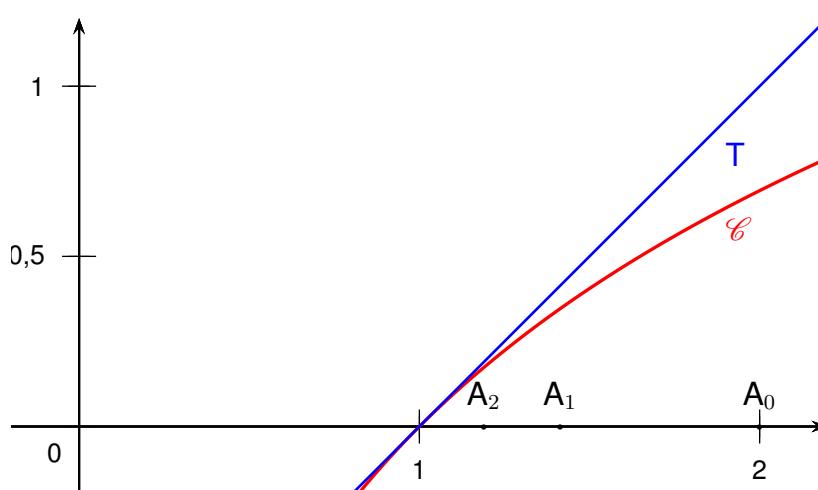
Partie B

On désigne par (v_n) la suite définie pour tout entier naturel n par $v_n = \ln(u_n)$.

1. (a) Démontrer que la suite (v_n) est géométrique de raison $\frac{1}{2}$.
 (b) Exprimer v_n en fonction de n , pour tout entier naturel n .
 (c) En déduire que, pour tout entier naturel n , $\ln(2) = 2^n \ln(u_n)$.
2. On a tracé ci-dessous dans un repère orthonormé la courbe \mathcal{C} de la fonction \ln et la tangente T à la courbe \mathcal{C} au point d'abscisse 1.

Une équation de la droite T est $y = x - 1$.

Les points A_0, A_1, A_2 ont pour abscisses respectives u_0, u_1 et u_2 et pour ordonnée 0.



On décide de prendre $x-1$ comme approximation de $\ln(x)$ lorsque x appartient à l'intervalle $]0, 99 ; 1, 01[$.

- Déterminer à l'aide de la calculatrice le plus petit entier naturel k tel que u_k appartienne à l'intervalle $]0, 99 ; 1, 01[$ et donner une valeur approchée de u_k à 10^{-5} près.
 - En déduire une approximation de $\ln(u_k)$.
 - Déduire des questions **1. c.** et **2. b.** de la **partie B** une approximation de $\ln(2)$.
3. On généralise la méthode précédente à tout réel a strictement supérieur à 1.

Recopier et compléter l'algorithme ci-dessous afin que l'appel `Briggs(a)` renvoie une approximation de $\ln(a)$.

On rappelle que l'instruction en langage Python `sqrt(a)` correspond à \sqrt{a} .

```
from math import*
def Briggs(a):
    n = 0
    while a >= 1.01:
        a = sqrt(a)
        n = n+1
    L = ...
    return L
```

Pour chacune des affirmations suivantes, indiquer si elle est vraie ou fausse. Chaque réponse doit être justifiée.

Une réponse non justifiée ne rapporte aucun point.