

Pour chacune des affirmations suivantes, indiquer si elle est vraie ou fausse.
Chaque réponse doit être justifiée. Une réponse non justifiée ne rapporte aucun point.
Dans cet exercice, les questions sont indépendantes les unes des autres.

1. On considère l'équation différentielle :

$$(E) \quad y' = \frac{1}{2}y + 4.$$

Affirmation 1 : Les solutions de (E) sont les fonctions f définies sur \mathbb{R} par :

$$f(x) = ke^{\frac{1}{2}x} - 8, \quad \text{avec } k \in \mathbb{R}.$$

2. Dans une classe de terminale, il y a 18 filles et 14 garçons.

On constitue une équipe de volley-ball en choisissant au hasard 3 filles et 3 garçons.

Affirmation 2 : Il y a 297,024 possibilités pour former une telle équipe.

3. Soit (v_n) la suite définie pour tout entier naturel n par :

$$v_n = \frac{n}{2 + \cos(n)}.$$

Affirmation 3 : La suite (v_n) diverge vers $+\infty$.

4. Dans l'espace rapporté à un repère orthonormé $(O ; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$, on considère les points $A(1 ; 1 ; 2)$, $B(5 ; -1 ; 8)$ et $C(2 ; 1 ; 3)$.

Affirmation 4 : $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = 10$ et une mesure de l'angle \widehat{BAC} est 30.

5. On considère une fonction h définie sur $]0 ; +\infty]$ dont la dérivée seconde est définie sur $]0 ; +\infty]$ par :

$$h''(x) = x \ln x - 3x.$$

Affirmation 5 : La fonction h est convexe sur $[e^3 ; +\infty[$.